

LINEÁRIS ALGEBRA BEVEZETŐ

HUJTER BÁLINT – OLIMPIAI ISKOLA, 2025. MÁRC. 28-30.

VERZIÓ: 2025. ÁPRILIS 3.

1. Szombat délelőtt

1.1. Indító feladatok

Példa olyan polinomra, amelynek nem egészek az együtthatói, mégis minden egész helyen egész értéket vesz fel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

- 1. feladat.** a) Mutass olyan harmadfokú, tehát $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú függvényt, amelyre teljesül, hogy a, b, c, d nem mind egész számok, de f mégis minden egész x -hez egész számot rendel értékül.
b) Keress olyan példát, ahol $|a|$ a lehető legkisebb. ($a \neq 0$, különben nem lenne harmadfokú.)
c) Mi a helyzet n -edfokú polinomok esetén?

2. feladat (KöMaL F.2574. alapján). Egy $k \times n$ -es táblázat mindegyik mezőjén van egy-egy lámpácska, amely nyomógombként is működik. Ha valamelyik gombot megnyomjuk, akkor az ebben levő lámpa, valamint mindazok, amelyek a megnyomott gommbal oldal mentén szomszédosak, állapotot váltanak, tehát amelyik korábban égett, az a nyomás hatására elalszik, amelyik pedig korábban nem égett, az kigyullad. El lehet-e érni bármely állapotot a teljesen lekapcsolt kiindulási állapotból indulva

- a) 3×3 -as b) 4×4 -es

táblázat esetén?

3. feladat (Számkitalálás). Micimackó gondolt tíz egész számot, ezek $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. Malacka megkérdezheti tőle bármely olyan kifejezés értékét, amelyet ezekből az összeadás és kivonás segítségével képezünk, pl. mennyi $x_1 + 8x_2 - 7x_3$. A következő kérdés mindig függhet az előzőre kapott választól.

- a) Legkevesebb hány kérdéssel tudja Malacka kitalálni a tíz számot?
b) Mennyiben változik a helyzet, ha Micimackó elárulta, hogy pozitív egészekre gondolt?

4. feladat (13 súly). a) Adott 13 darab súly. Akármelyiket is hagyjuk el, a maradék 12 darab beosztható két hatos csoportba úgy, hogy az egyes csoportokban levő súlyok összege megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy mind a 13 súly egyenlő kell legyen, ha a súlyok

- a) pozitív egészek, b) egészek, c) racionálisak d) ★ tetszőleges valós számok lehetnek.

5. feladat (KöMaL B.4988., Iráni versenyfeladat). ★ Egy $(m+2) \times (n+2)$ -es táblázatnak levágjuk a négy darab 1×1 méretű „sarkát”. Az így kapott csonka táblázat első és utolsó sorának, illetve első és utolsó oszlopának minden mezőjére egy-egy (tetszőleges) valós számot írunk. Igazoljuk, hogy a táblázat maradék $m \times n$ -es „belseje” egyértelműen kitölthető valós számokkal úgy, hogy minden ide eső szám megegyezzen a négy szomszédjának átlagával.

1.2. Délelőtti megbeszélés

Definíció: Lineáris egyenletrendszer (LER)

1.2.1. Két villámkérdés

6. feladat. Add meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned}2x + 4y - 3z &= 3 \\7y + 6z - x &= 12 \\2y + z &= 3\end{aligned}$$

7. feladat. Hány megoldása lehet egy lineáris egyenletrendszernek?

1.2.2. Feladatok a két villámkérdés megbeszélése után

8. feladat. Tekintsünk egy n ismeretlenes, k egyenletből álló LER-t. Melyik lehetséges és melyik nem lehetséges az alábbiak közül?

	0 mo.	1 mo.	∞ mo.
$k < n$			
$k = n$			
$k > n$			

9. feladat. a) Adj meg 4 lineáris egyenletet úgy, hogy közülük bármely 3-nak együtt még legyen megoldása, de a 4-nek együtt már ne legyen. b) Legkevesebb hány ismeretlen kell ehhez?

2. Szombat délután

2.1. Délutánt indító megbeszélés

10. feladat. Adott egy 6 egyenletből álló, 4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Bizonyítsd be, hogy ha bármelyik 5 egyenletnek van közös megoldása, akkor mind a 6 egyenletnek is van közös megoldása.

11. feladat. Az n -edfokú p polinomra teljesül, hogy $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 8, \dots, p(n) = 2^n$. a) Meghatároztam-e egyértelműen ezt a polinomot? b) Mennyi $p(n+1)$?

2.1.1. Lámpakapcsolgató játék

12. feladat. Bizonyítsd be, hogy az elérhető állapotok száma bármely $n \times n$ -es táblázatnál 2-hatvány.

13. feladat. ★ Egy gráf minden csúcsában van egy lámpa és egy kapcsoló. A kapcsoló az érintett csúcsot és a szomszédjait kapcsolja. Bizonyítsuk be, hogy a teljesen lekapcsolt állapotból el lehet jutni a teljesen felkapcsolt állapotba.

2.2. Gauss-elimináció

Ezen az egyenletrendszeren csináltuk végig a Gauss-eliminációt.

$$\begin{aligned}x + 2y - z + 3w &= 1 \\x - y + 2w &= 2 \\-2x + 2y + w &= 0 \\3x + y - 2z - w &= 3.\end{aligned}$$

2.2.1. Feladatok a Gauss-elimináció megismerése után

14. feladat. A főnököd ad neked egy lineáris egyenletrendszert. Megoldottad a Gauss-eliminációval, és látod, hogy nincs megoldás. Hogyan lehetne meggyőzni a főnököt, hogy tényleg nincs megoldás?

A főnöknek nincs ideje Gauss-eliminációt végigcsinálni, valami ennél lényegesen kevesebb számolással ellenőrizhető bizonyítékot szeretnénk.

Megbeszéltük, hogy azt, hogy végtelen sok megoldás van, könnyű bizonyítani: elég megadni két megoldást (ezeket a főnök könnyen ellenőrizheti behelyettesítéssel).

Arra is érdekes lenne egy gyors bizonyíték, ha csak egyetlen megoldás – de sajnos én sem ismerek egyszerűbb bizonyítékot a Gauss-elimináció lefuttatásánál.

15. feladat. Tekintsünk egy n ismeretlenes, k egyenletből álló **homogén** LER-t (azaz $= 0$ -ra akarom megoldani). Melyik lehetséges és melyik nem lehetséges az alábbiak közül?

	1 mo.	∞ mo.
$k < n$		
$k = n$		
$k > n$		

16. feladat. Egy egész együtthatós polinomot *primadonnának* nevezünk, ha minden nemnulla együtthatós monomjának kitevője prímszám, pl. a $4x^{13} - x^5 + 10x^2$ polinom primadonna. Bizonyítsuk be, hogy minden p polinomhoz létezik olyan q polinom, hogy pq primadonna.

3. Vasárnap délelőtt

17. feladat. (a 15. feladat folytatása) Tekintsünk az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert és ennek homogenizáltját, az $Ax = 0$ egyenletrendszert (tehát ugyanazok az egyenletek, csak a konstans tagot 0-ra változtatjuk). Ezek kapcsolatáról akarunk állításokat megfogalmazni.

a) Az $Ax = b$ egyenletnek ∞ megoldása van $\implies$ Az $Ax = 0$ egyenletnek ∞ megoldása van (azaz van nemtriviális megoldása).

b) Az $Ax = b$ egyenletnek 1 megoldása van $\implies$ Az $Ax = 0$ egyenletnek 1 megoldása van.

c) Ha a mátrix négyzetes, akkor az előző állítás megfordítása is igaz.

Az alábbi a lineáris algebra alapvető definíció-párja. Sajnos arra már nem jutott idő, hogy érdemben foglalkozzunk vele. A házi feladatok között viszont lesz, ami erről szól.

3.1. definíció. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok **lineárisan összefüggők**, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ együtthatók, hogy nem mindegyik 0 és $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Ha nincsenek ilyen λ_i -k, akkor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ **lineárisan függetlenek**.

4. Házi feladatok

1. házi feladat. Tekintsünk egy $k \times n$ -es valós mátrixot (azaz k sorból és n oszlopból álló táblázatot, amely valós számokkal van kitöltve). A táblázat sorai tekinthetők egy-egy n -dimenziós vektornak, míg az oszlopai egy-egy k -dimenziós vektornak.

Bizonyítsuk be a következőket:

- a) Ha $k < n$, akkor az oszlopok biztos, hogy lineárisan összefüggők.
- b) Ha $k > n$, akkor a sorok biztos, hogy lineárisan összefüggők.
- c) Ha $k = n$, akkor a sorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az oszlopok is lineárisan függetlenek.

2. házi feladat. Legfeljebb mennyi 42-változós lineáris egyenletet lehet megadni úgy, hogy közülük bármely 42-t kiválasztva olyan egyenletrendszert kapjunk, amelynek egyértelmű a megoldása.

3. házi feladat. A legelső Olimpiai Iskola alkalmon, teljes indukció témában szerepelt a következő feladat: *Egy konferencián n matematikus ebédel. Két terem van, melyekben úgy szeretnének leülni, hogy mindenki páros sok ismerősével üljön egy teremben. Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megoldható. (Az ismeretség kölcsönös.)*

Mutasd meg, hogy ez a feladat ekvivalens a fenti 13. feladattal.

Megjegyzés: A feladatpárra létezik teljes indukciós és lineáris algebrai indoklás is, egyik sem túl hosszú, de mindegyikre nehéz rájönni.

4. házi feladat (KöMaL F.2610., 1986, javasolta: Mérő László). Egy 5×5 -ös táblázat mindegyik mezőjén van egy-egy lámpácska, amely nyomógombként is működik. Ha valamelyik gombot megnyomjuk, akkor az ebben levő lámpa, valamint mindazok, amelyek a megnyomott gombbal oldal mentén szomszédosak, állapotot váltanak, tehát amelyik korábban égett, az a nyomás hatására elalszik, amelyik pedig korábban nem égett, az kigyullad. Bizonyítsuk be, hogy ha kezdetben egyetlen lámpa sem ég, és egy mintázat bizonyos gombok egymás utáni megnyomásával előállítható, akkor ugyanez a mintázat legfeljebb 17 gomb megnyomásával is előállítható.

5. házi feladat (A 1. feladat folytatása). ★ Bizonyítsuk be, hogy ha az n -edfokú f polinomfüggvény minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor léteznek olyan $a_0, a_1, \dots, a_n$ egész számok, amelyekre:

$$f(x) = a_n \binom{x}{n} + a_{n-1} \binom{x}{n-1} + \dots + a_1 \binom{x}{1} + a_0.$$

6. házi feladat. ★ Egy versenyen n darab tesztkérdésre kellett válaszolni. Minden feladat pontértéke pozitív egész szám volt, részpontszámot nem lehetett szerezni. A tesztek kijavítása után a szervezők azt vették észre, hogy az feladatokhoz tartozó pontértékek (más pozitív egész számokra való) megváltoztatásával a versenyzők tetszőleges holtverseny nélküli sorrendje előállítható lenne. Legfeljebb hányan vehettek részt a versenyen?

Megjegyzés: Ez egy nagyon szép, de igen nehéz feladat. Egy jó segítség lehet, ha megérted és elolvasod a 2025 februári KöMaL A.900. lineáris algebrai megoldását: <https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A900>

5. Olvasnivalók

- Freud Róbert *Lineáris Algebra* című, különleges igényességű alaposságú egyetemi tankönyve szabadon letölthető a szerző oldaláról: <https://freud.web.elte.hu/linalkonyv24.pdf>

A 9. fejezet feladatai fontos részét képezték a táborban elmondottaknak, megoldások is találhatóak a kötetben. (A házi feladatok közül is van, ami itteni feladat közeli rokona.)

Akinek van kedve elmélyedni a lineáris algebra tudományában, a könyv többi részét is bátran lapozgathatja.

- A lámpakapcsolós játékról két jó cikk is elérhető a neten
 1. Mérő László: A lámpácskás játékról, KöMaL, 1986/április, 145-150. oldal <http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198602>
 2. Csákány Béla, Juhász Rozália, Makay Géza: Lámpácskás játékok I., POLYGON folyóírar, XIX.kötet, 1.sz., 2010. szeptember <https://www.math.u-szeged.hu/polygonlap/p201.pdf>

Ezekből is nagy segítségék nyerhetők bizonyos HF-k megoldásához.