

Olimpiai szakkör 2025. március 28.

1. Egy n főből álló társaságban a nők és férfiak számának eltérése nem nagyobb, mint 1. A társaság tagjai le tudnak úgy ülni egy kerek asztal köré, hogy ha mindenki a tőle k -val jobbra levő székre ül, ahol k az n -nél kisebb pozitív egész, akkor azoknak a székeknek a száma, ahol az átülés előtt is és után is férfi ül, minden lehetséges k érték esetén éppen 2. Mennyi lehet az n ?

2. Egy 10 tagú csoport minden tagját megkérték, írjanak le három különböző pozitív egész számot. Később kiderült, hogy bármely két ember számai között volt legalább egy azonos. Az 1-es számot éppen n ember választotta és semelyik más számot nem választották ennél többen. Mi lehetett n értéke?

3. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC \neq BC$. A háromszög köré írt kör középpontját jelölje O , magasságpontját pedig M . Az A , B és C csúcsokhoz tartozó magasságok talppontjai legyenek rendre A_1 , B_1 és C_1 . Jelölje D a C csúcsnak az A_1B_1 egyenesre vonatkozó tükörképét. Igazoljuk, hogy az O , M , D és C_1 pontok egy körre illeszkednek.

4. Oldjuk meg a nemnegatív valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(2x+1)^2} = 2x + 2.$$

5. Van egy kétkarú mérlegünk és súlyaink: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 grammosak. Hány grammos tárgyat tudunk a legtöbb különböző módon kimérni?

6. Tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $AC=BC$. Legyen P az AB alap azon pontja, amelyre teljesül, hogy az APC háromszög beírt k_1 körének sugara ugyanakkora, mint a PBC háromszög PB oldalához hozzáírt k_2 körének a sugara. Mutassuk meg, hogy a k_1 kör AC -vel párhuzamos $e \neq AC$ érintője, valamint a k_2 kör BC -vel párhuzamos $f \neq BC$ érintője a háromszög AB alapján metszik egymást.