

Olimpiai szakkör 2025. március 14.

A szakkör elején az alábbi három feladatot, a második felében a 2025-ös Surányi János emlékverseny feladatait beszéljük meg.

1. Melyek azok a 2020-nál kisebb pozitív egész s számok, amelyekre minden egész n esetén $4n+1$ és $sn+1$ relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1?
2. Az ABC háromszögben $\angle C=90^\circ$, a C -hez tartozó magasság talppontja az AB oldalon T . Legyen az AB oldalt, a CT magasságot és az ABC köré írt kör C -t tartalmazó AB ívét belülről érintő két kör középpontja P és Q . Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC beírt körének középpontja.
3. Adott egy n oszlopos és m soros táblázat, ahol n és m is egynél nagyobb pozitív egészek. A táblázat mezőire korongokat rakunk, minden mezőre legfeljebb egyet. Nevezzünk két korongot szomszédosnak, ha egy sorban vagy oszlopban vannak, és az őket összekötő szakasz mentén lévő mezőkön nincsen más korong. Tudjuk, hogy minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Maximálisan hány korong kerülhetett a táblázatra?