Olimpiai szakkör, 2025. február 28.

1. Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, és

$$G(x) = F_0 + F_1 F_2 x^2 + \ldots.$$

(a) Írjunk fel függvényegyenletet a $G(x)$ generátorfüggvévnyre, és számítsuk ki.
(b) Vezessüönk le explicit képletet a Fibonacci-számokra.

2. A $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Catalan-számokra teljesül a következő rekurzió:

$$c_0 = 0, \quad c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0.$$

Számítsuk ki az $F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ generátorfüggvényt.

3. (a) Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg 6-ost nem dobunk. Várhatóan hányszor dobunk?

(b) Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg mind a 6 eredmény legalább egyszer elő nem fordul. Várhatóan hányszor dobunk?

(c) Egy cinkelt dobókockán az egyes dobások valószínűsége $p_1, p_2, \ldots, p_6$. A kockát addig dobáljuk, amíg mind a 6 eredmény legalább egyszer elő nem fordul. Várhatóan hányszor dobunk?

4. Lehetséges-e két kockát úgy „cinkelni”, (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét a kockákon úgy megváltoztatni) hogy a feldobásuk után kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének ugyanannyi legyen a valószínűsége? (KöMaL F. 2652., 1987. november)

5. Egy érme két oldalára az 1, 2, egy kocka lapjaira pedig az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írjuk. Határozzuk meg az érme és a kocka összes olyan cinkelését, hogy azokat egyszerre feldobva a $2, \ldots, 8$ dobásösszegek mindegyike ugyanolyan valószínűséggel forduljon elő, mint két olyan szabályos tetraéderrel történő dobás esetén, amelyek lapjaira az 1, 2, 3, 4 számokat írjuk. (Tetraéderrel való dobás eredményén az alsó lapon lévő számot értjük; cinkelés alatt pedig azt, hogy egy tárgy súlyozását megváltoztathatjuk úgy, hogy ne feltétlenül egyenlő eséllyel essen a különböző oldalakra.) (KöMaL B. 5364., 2024. január)

6. (a) A és B a következő játékot játssza: az első 100 egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként pedig B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyerési esélye? (Kürschák 1986/3)

(b) A és B a következő játékot játssza: az első $n = 101$ egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként pedig B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyerési esélye? (Kürschák 1986/3)

(c) A, B és C a következő játékot játssza: az első $n = 99$ egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot, és kiszmítják a kiválasztott számok összegének 3-s maradékát. Ha a maradék 0, akkor A, ha a maradék 1, akkor B, ha pedig a maradék 2, akkor C nyer. A k milyen értékeire lesz egyenlő a játékosok nyerési esélye?

(d) Általánosítsuk a feladatot úgy, hogy a játékosok száma prímszám, vagy tetszőleges egész, és k osztója, vagy nem osztója az n-nek.