OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Vieta-jumping

Kocsis Anett szakköre

Feladatok

F/1. Legyen x és y pozitív egészek, melyekre teljesül, hogy xy osztja x^2+y^2+1-et. Mutassuk meg, hogy ekkor $\frac{x^2+y^2+1}{xy}=3$.

F/2. a) Keressük meg az összes pozitív egészekből álló (m,n) számpárt, melyre teljesül, hogy

$$n \mid m^2+1, \quad m \mid n^2+1.$$

b) Keressük meg az összes olyan pozitív egészekből álló (m,n) számpárt, melyre teljesül, hogy $m,n \leq 100$ valamint hogy

$$n \mid m^2-1, \quad m \mid n^2-1.$$

F/3. (Putnam, 1933) Mutassuk meg hogy tetszőleges pozitív egész N számhoz találhatók olyan $a,b,c,d>N$ egész számok melyekre fennáll hogy

$$a^2+b^2+c^2+d^2=abc+bcd+cda+dab.$$

F/4. (Crux) Legyenek a,b,c olyan pozitív egész számok melyekre igaz, hogy

$$0<a^2+b^2-abc \leq c.$$

Mutassuk meg hogy a^2+b^2-abc négyzetszám.

F/5. Találjuk meg az összes pozitív egész számot ami $\frac{a^2+b^2+1}{ab-1}$ alakban írható valamilyen a,b pozitív egészekkel.

F/6. (Vietnam, 2002) Keressük meg az összes pozitív egész n számot melyre a

$$(a+b+c+d)^2=n^2abcd$$

egyenlet megoldható a pozitív egészek körében.

F/7. (IMO 2007/5)Legyenek a és b pozitív egész számok melyekre teljesül, hogy $4ab-1$ osztja $(4a^2-1)^2$-et. Mutassuk meg hogy ekkor $a=b$.

F/8. (IMO SL, 2019/N8) Legyen a és b két pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy

$$a^2+\left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

értéke nem lehet négyzetszám.

2025. március 22.
Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Absztrakcióra vágyóknak

Emlékeztető: (Az algebra alaptétele) Minden valós együtthatós, 1 főegyütthatójú $P(x)$ polinom egyértelműen előáll $(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)$ alakban, ahol $c_i \in \mathbb{C}$.

A/1. Határozzuk meg az összes olyan P és Q valós együtthatós polinomot, melyeknek 1 a főegyütthatója, valamint $P \mid Q^2+1$ és $Q \mid P^2+1$.
Két valós együtthatós R,S polinom esetén azt mondjuk, hogy $R \mid S$, ha létezik olyan valós együtthatós T polinom, melyre $RT = S$.

Útmutatás: Először hozzuk olyan alakra az oszthatósági feltételeket, mint a 2-es feladat megoldásában. Ezután keressünk egy jó minimalitási feltételt.

Házi feladatok

Beadási határidő: 2025. március 30. (vasárnap)

HF/1. Legyen a, b olyan pozitív egészekből álló számpár, melyre $ab-1$ osztja a^2+b^2-t. Mutassuk meg hogy ekkor

$$\frac{a^2+b^2}{ab-1} = 5.$$

Van-e végtelen sok különböző megoldás?

HF/2. (Vandervelde, 2013) Legyenek a, b, c pozitív egészek. Tudjuk, hogy $abc+1$ osztja $a^2+b^2+c^2$-t. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$$

előáll két négyzetszám összegeként.

HF/3. (IMO SL, 2017/N6) Keressük meg a legkisebb olyan n pozitív egész számot, melyre végtelen sok pozitív racionális számokhból álló $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$ számhalmaz létezik azzal a tulajdonsággal, hogy $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ és $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ is egész számok.

2025. március 22.

Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com