Olimpiai szakkör 2025. február 14.

1. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján vegyünk fel egy P pontot. P-ből merőlegeseket állítunk a két szár egyenesére, ezek talppontjai I, illetve J. A háromszög magasságpontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy a PM egyenes áthalad az IJ szakasz felezőpontján.
2. Legyenek $1 \le k \le n$ rögzített egészek. Mennyi az $x_1 x_2 \ldots x_k + x_2 x_3 \ldots x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \ldots x_n$ kifejezés maximuma, ha $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív számok és összegük 1?
3. Rögzítsünk a síkon egy AB szakaszt és annak egy P belső pontját. Ha ABC tetszőleges háromszög, húzzunk P-ből párhuzamost az AC, illetve BC oldalakkal. Ezek az egyenesek a BC oldalt a Q pontban, az AC oldalt az R pontban metszik. Az APR és BPQ háromszögek köré írt körök P-től különböző metszéspontja legyen H. Mi a H pontok halmaza, ha a C pont a sík minden, az AB egyenesre nem illeszkedő pontján végigfut?
4. Hány olyan, nem 0-ra végződő többszöröse van a 2012-nek, amelyben a számjegyek összege 5?
5. Egy külkereskedelmi vállalatnak 70 dolgozója van. A vállalat bármely két A és B dolgozójához van olyan nyelv, amit A beszél de B nem és olyan is, amit B beszél de A nem. Legalább hány különböző nyelvet beszélnek a vállalat dolgozói?
6. Egy n-szer n-es táblázat minden mezőjén 1, -1 vagy 0 áll. Bármelyik két sort választjuk is ki, és a két sor azonos oszlopaiban álló elemeit összeszorozzuk, a kapott szorzatok összege zérus. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatban található számok összege nem nagyobb, mint $n \cdot \sqrt{n}$.
7. Mutassuk meg, hogy egy háromszög csúcsain áthaladó és a kerületét felező egyenesek egy T pontban metszik egymást és a háromszög súlypontja harmadolja a beírt kör középpontját a T ponttal összekötő szakaszt.