Kiindulás szélső helyzetből

Jánosik Máté szakköre

Feladatok

F/1. A szikíniai parlament eddig egy házból állt. Minden képviselőnek legfeljebb három ellensége van a többi képviselő közül. Mutassuk meg, hogy fel lehetne osztani a házat két házra úgy, hogy minden képviselőnek legfeljebb egy ellensége legyen a saját házában.

F/2. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex poliédernek van legalább két olyan lapja, amelyek oldalszáma megegyezik.

F/3. 3 darab n-fős iskolából mindenki ismer összesen $n+1$ diákot a másik két iskolából. Bizonyítsd be, hogy van 3 diák, akik mind különböző iskolába járnak, és páronként ismerik egymást.

F/4. Van néhány kupac zsetonunk. Két játékos felváltva lép, egy lépés abból áll, hogy minden olyan kupacot, amelyben egynél több zseton van, két kupacra kell osztani. Az nyer, aki utoljára lép. Milyen kezdeti feltételek esetén nyer az első játékos, és mi a nyerő stratégiája?

F/5. Hét törpe ül egy kör alakú asztal körül, mindegyiküknek van egy csészéje. Néhány csészében tej van, összesen 3 liter. Az egyik törpe egyenletesen elosztja a csészéjében lévő tejet a többiek között. Az óramutató járásával ellentétes irányban haladva, a többi törpe sorban ugyanígy tesz. Miután a hetedik törpe is megosztotta a tejet, minden csésze eredeti tartalma visszaáll. Mennyi tej volt eredetileg a csészékben?

F/6. A síkon megadtunk n pontot úgy, hogy a pontok közül három tetszőleges háromszöget alkot amelynek területe ≤ 1. Mutassuk meg, hogy mind az n pont egy ≤ 4 területű háromszögben van.

F/7. Minden $n \geq 3$ konvex n-szögben van három egymást követő A, B, C csúcs úgy, hogy az ABC háromszög körülírt köre az egész n-szöget lefedi.

2025. február 22.

Szakkörvezető: Jánosik Máté (janosikmate6@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Nehezebb feladatok

F/8. Adott 2024 vektor a síkon. Két játékos felváltva vesz el egy vektort, amíg nem marad egy vektor sem. A játék végén összeadják a vektoraikat és az veszít, akinek az összege kisebb hosszúságú. Kinek van nem vesztő stratégiája?

F/9. Egy kocka nem osztható több páronként különböző kockára.

F/10. Ki tudunk-e választani 1983 különböző 100000-nél kisebb pozitív egészt, hogy nincs köztük három hosszú számtani sorozat?

F/11. Nyilvánvalóan n a legkisebb számú bástya, amely egy n × n-es sakktáblát ütésben tud tartani. De mi az a bástyaszám, amely egy n × n × n sakktábla összes üres mezőjét ütésben tudja tartani?

F/12. Mutassuk meg, hogy $n \geq 5$ általános helyzetű sík legalább $\frac{2n-3}{4}$ tetraéder alakú térrészt alakít ki (olyat, amibe nem metsz bele egy ötödik sík).

F/13. Legyen M a legnagyobb távolság a sík hat különböző pontja között, és legyen m a legkisebb távolságuk. Bizonyítsuk be, hogy $M/m \geq \sqrt{3}$.

F/14. A síkban lévő véges S ponthalmazra teljesül, hogy bármelyik két pontján áthaladó egyenes áthalad egy harmadik pontján. Mutassuk meg, hogy az összes pont egy egyenesen fekszik.

F/15. Az űrben néhány egységnyi sugarú bolygó van megadva. Minden bolygó felszínén megjelöljük azokat a pontokat, ahonnan a többi bolygó közül egyik sem látható. Bizonyítsuk be, hogy a megjelölt pontok területének összege megegyezik egy bolygó felszínével.

Házi feladatok

HF/1. Egy kör alakú pályán n egyforma autó van. Együtt éppen annyi benzin van bennük, hogy egy autónak pont egy kör megtételére elegendő. Mutassuk meg, hogy van olyan autó, amely tud úgy egy kört teljesíteni, hogy útközben csak a többi autótól gyűjt benzint.

HF/2. Néhány bástyát az n × n-es sakktáblán a következő feltételnek megfelelően helyezzük el: Ha az (i, j) négyzet szabad, akkor legalább n bástya van az i-edik sorban és a j-edik oszlopban együtt. Mutassuk meg, hogy legalább $n^2/2$ bástya van a táblán.

HF/3. Egy osztály 30 tanulója közül mindenkinek ugyanannyi barátja van az osztálytársai között. Legfeljebb hány olyan diák van, aki jobban tanul, mint a barátai többsége?

Bármely két tanuló közül meg lehet mondani, hogy melyikük tanul jobban

2025. február 22.

Szakkörvezető: Jánosik Máté (janosikmate6@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Kiindulás szélsőhelyzetből

Jánosik Máté szakköre

Házi feladatok

Beadási határidő: március 4. (kedd)

HF/1. Egy kör alakú pályán n egyforma autó van. Együtt éppen annyi benzin van bennük, hogy egy autónak pont egy kör megtételére elegendő. Mutassuk meg, hogy van olyan autó, amely tud úgy egy kört teljesíteni, hogy útközben csak a többi autótól gyűjt benzint.

HF/2. Néhány bástyát az n × n-es sakktáblán a következő feltételnek megfelelően helyezzük el: Ha az (i, j) négyzet szabad, akkor legalább n bástya van az i-edik sorban és a j-edik oszlopban együtt. Mutassuk meg, hogy legalább $n^2/2$ bástya van a táblán.

HF/3. Egy osztály 30 tanulója közül mindenkinek ugyanannyi barátja van az osztálytársai között. Legfeljebb hány olyan diák van, aki jobban tanul, mint a barátai többsége?

Bármely két tanuló közül meg lehet mondani, hogy melyikük tanul jobban

2025. február 22.

Szakkörvezető: Jánosik Máté (janosikmate6@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu