Olimpiai szakkör 2025. január 17.

1. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja, továbbá A', B' és C' a P pont merőleges vetülete rendre a BC, CA, illetve AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy $AC'\cdot BA'+BA'\cdot CB'+CB'\cdot AC' = C'B\cdot A'C+A'C\cdot B'A+B'A\cdot C'B$.
2. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?
3. Legyenek $a(1) \le a(2) \le \ldots \le a(n) \le b(1) \le b(2) \le \ldots \le b(n)$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $(a(1) + a(2) + \ldots + a(n) + b(1) + b(2) + \ldots + b(n))^2 \ge 4n(a(1)b(1) + a(2)b(2) + \ldots + a(n)b(n))$.
4. Tekintsük az összes olyan parabolát, melyek egyenlete $y = x^2 + ax + b$, ahol a és b valós számok, továbbá a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bármely parabola esetén ez a három pont meghatároz egy kört. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen kör átmegy egy közös ponton.
5. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?
6. Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét stb. (a talpponti háromszög csúcsai a három magasságvonalnak a hozzájuk tartozó oldalegyenessel való metszéspontjai). Hány olyan, páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk?
7. Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek.
8. Egy kocka élhossza n egység. A felületét alkotó $6n^2$ darab egységnégyzet közül maximálisan hányat lehet kijelölni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala?