Olimpiai Iskola
vol2

SZAKKÖR

Hasonlósági pontok, érintő körök

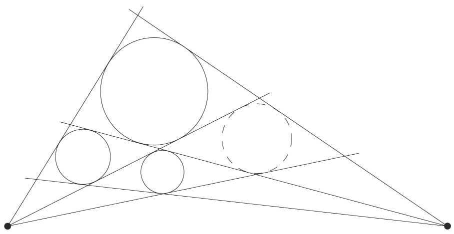
Kós Géza

Olvasnivaló

Kós G: Térbe kilépő bizonyítások IV / Kúpok és hasonlósági pontok
`https://www.dropbox.com/preview/TerGeoCikk/KosG_komal4.pdf`

Feladatok

F/1. Két pontból rajzoljunk három-három félegyenest úgy, hogy bármely két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást. Ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha ezek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is érintőnégyszög.



F/2. Az $A_1A_2A_3$ nem szabályos háromszög magasságpontja M, Feuerbach-pontja F, körülírt köre k. Minden egyes $i = 1, 2, 3$-ra legyen k_i az a kör, ami belülről érinti k-t, továbbá érinti az A_iA_{i+1} és A_iA_{i+2} oldalakat (Az indexet modulo 3 értjük, tehát $A_4 = A_1$ és $A_5 = A_2$.) A k és a k_i körök érintési pontját jelöljük T_i-vel. Bizonyítsuk be, hogy az A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3 és MF egyenesek egy ponton mennek át. (A Feuerbach-pont az a pont, ahol a háromszög Feuerbach-köre és beírt köre érintik egymást.)

(KöMaL A.540., Damásdi Gábor és Mester Márton)

Segítség: Az érintési pontok egyben hasonlósági pontok is.

F/3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalának egy belső pontja P. Legyen a CPD háromszög beírt köre ω, középpontja I. Tegyük fel, hogy ω érinti a APD és BPC háromszögekbe írt köröket a K, illetve az L pontban. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja E, az AK és BL egyenesek metszéspontja pedig F. Bizonyítsuk be, hogy az E, I és F pontok egy egyenesen vannak. (IMO Shortlist, 2007/G8, Waldemar Pompe)

Segítség: Írjunk köröket az $APCD$ és $PBCD$ négyszögekbe is, és keressünk hasonlósági pontokat. ... És kell még egy kör...

2025. január 11.

Kós Géza (kosgeza@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

F/4. A ABC háromszögbe írt kör középpontja I. Az ω kör a P pontban érinti AB-t, Q-ban AC-t, és T-ben belülről érinti a körülírt kört. A körülírt kör A-val szemközti BC ívének felezőpontja M.

a) Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz átmegy I-n.

b) Mutassuk meg, hogy $TM \perp TI$.

Segítség: Razoljuk meg a BI és CI szögelezőket, és keressük meg a a Pascal-tételt az ábrában.

F/5. Adott egy ABC háromszög. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek érintik a háromszög két oldalegyenesét és kívülről érintik a körülírt kört.

F/6. Az ABC hegyesszögű háromszögben a beírt kör érintési pontja a BC, CA, AB oldalon rendre D, E, illetve F. A háromszög köré írt kör az AEF kört az A-tól különböző P, a BFD kört a B-től különböző Q, a CDE kört pedig a C-től különböző R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a DP, EQ és FR egyenesek egy ponton mennek át.

(KöMaL B.5221., Lovas Márton)

F/7. Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a beírt körének középpontja I. Jelölje S_b, illetve S_c annak az AC illetve AB ívnek a felezőpontját, ami nem tartalmazza a harmadik csúcsot. Jelölje N_a a BAC ív felezőpontját. Legyen Ω_b az a kör, ami érinti AB-t, és belülről érinti Ω-t az S_b-ben, és legyen Ω_c az a kör, ami érinti AC-t, és belülről érinti Ω-t az S_c-ben. Mutassuk meg, hogy az Ω_b és Ω_c körök metszéspontjain átmenő egyenes és az IN_a egyenes az Ω körön metszik egymást. (EGMO 2023/6)

Segítség: 1. Keressünk további pontokat Ω_b és Ω_c hatványvonalán. 2. Hol metszi IN_a a körülírt kört?

F/8. A k körbe írt $ABCD$ húrnégyszögben I_1 és I_2 az ABC, illetve az ABD háromszögbe írt kör középpontja. Az I_1I_2 egyenes a BC egyenest E-ben, az AD egyenest F-ben, az AC egyenest G-ben, a BD egyenest H-ban metszi. Legyen M az $ABCD$ kör C, D-vel szemközti ívének felezőpontja.

a) Igazoljuk, hogy létezik egy olyan k_1 kör, ami E-ben, illetve F-ben érinti a BC és az AD egyenest, és belülről érinti k-t.

b) Legyen k és k_1 érintési pontja T. Igazoljuk, hogy I_1, I_2, M, T egy körön van.

c) Igazoljuk, hogy a GHT kör érinti az AC és a BD egyenest, és belülről érinti k-t.

(KöMaL A.505., Nagy János; Sawayama-lemma)

Segítség: Legyen $R = AB \cap I_1I_2$. Keressünk Pascal-konfigurációkat az ábrában.

F/9. Az ω körbe írt $ABCD$ húrnégyszögben F_A, F_B, F_C és F_D rendre az ω kör AB, BC, CD, illetve DA íveinek felezőpontja, továbbá I_A, I_B, I_C és I_D a DAB, ABC, BCD, illetve CDA háromszögekbe írt kör középpontja. Legyen ω_A az a kör, amely az F_A pontban belülről érinti ω-t és érinti a CD szakaszt, továbbá legyen ω_C az a kör, amely az F_C pontban belülről érinti ω-t és érinti az AB szakaszt. Végül legyen T_B az ω kör és az $F_BI_BI_C$ kör második, F_B-től különböző metszéspontja, és legyen T_D az ω kör és az $F_DI_DI_A$ kör második, F_D-től különböző metszéspontja.

Mutassuk meg, hogy az ω_A és ω_C körök hatványvonala átmegy a T_B és a T_D ponton. (KöMaL A.862, Kós G; EGMO 2023/6 alapján)

2025. január 11.

Kós Géza (kosgeza@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Olimpiai Iskola
vol2

SZAKKÖR

Hasonlósági pontok, érintő körök

Kós Géza

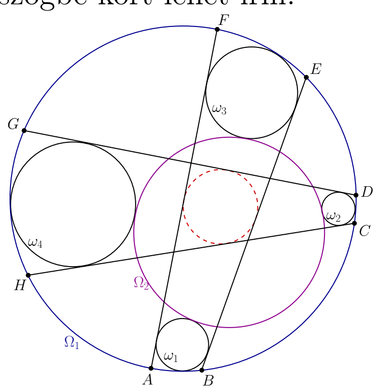
Házi feladatok

Beadási határidő: feburár 4, kedd

HF/1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz AB alapján P az a pont, amelyre $AP - BP = AC - BC$. A P-ben AB-re állított merőleges a CD, AC és BD egyeneseket rendre a Q, az R, illetve az S pontban metszi. Legyen k_1 az a kör, amely az AC és BD egyeneseket az R, illetve az S pontokban érinti, és legyen k_2 a PQ átmérőjű kör. Mutassuk meg, hogy k_1 és k_2 érintik egymást. (KöMaL B.4551., Kós G)

HF/2. Adott az ABC háromszög és belsejében a D pont úgy, hogy az ABD, BCD, és CAD háromszögekbe írt körök páronként érintik egymást. Jelöljük az érintési pontokat a BC, CA, AB, AD, BD, CD szakaszokon rendre A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2-vel. Legyen E az B_1C_2 és B_2C_1 egyenesek, F pedig a A_1C_2 és A_2C_1 egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy az AF, BE és C_1D egyenesek egy ponton mennek át. (KöMaL A.456., Kós G.)

HF/3. Adott az Ω_1 körbe írt $ABCDEFGH$ nyolcszög, és Ω_1 belsejében az Ω_2 kör. Tegyük fel, hogy az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 körök kívülről érintik Ω_2-t, továbbá ω_1 belülről érinti az Ω_1 kör AB ívét, az AF és a BE szakaszt; ω_2 belülről érinti a CD ívet, a CH és a DG szakaszt; ω_3 belülről érinti az EF ívet, az AF és a BE szakaszt; végül ω_4 belülről érinti a GH ívet, a CH és a DG szakaszt az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy az AF, BE, CH és DG szakaszok által bezárt négyszögbe kört lehet írni.



(KöMaL B.5381., Kós G)

2025. január 11.
Kós Géza (kosgeza@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu