Olimpiai Iskola
vol2

SZAKKÖR

Invariánsok és monovariánsok

Fleiner Zsiga szakköre

Feladatok

F/1. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat egész számokkal kitöltve. Ha egy sorban vagy oszlopban a számok összege negatív, abban a sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk egyszerre a számok előjelét. Bizonyítsd be, hogy egy idő után minden sorban és oszlopban pozitív lesz a számok összege.

F/2. Egy táblán pozitív egész számok szerepelnek. Egy lépésben két számot kicserélhetünk a legkisebb közös többszörösükre és a legnagyobb közös osztójukra. Bizonyítsd be, hogy van egy n szám, hogy n lépésben véget ér a folyamat, bárhogy is választjuk a számokat. (Csak úgy választhatunk számokat, hogy azok legkisebb közös többszöröse és legnagyobb közös osztója különbözzön a két számtól.)

F/3. Adott egy kártyapakli, amiben a kártyák 1-től 52-ig vannak számozva. Aladár a bűvész megkeveri a paklit majd a következőt csinálja folyamatosan. Megnézi a legfelső kártyát. Ha azon a k szám szerepel, akkor az felső k kártya sorrendjét megfordítja (tehát ezek után az eddig k. kártya kerül felülre, ami pedig eddig felül volt, az kerül a k. helyre). Mutasd meg, hogy egy idő után az 1-es lesz felül.

F/4. Jancsi bácsinak van egy kertje, amit 10×10 darab parcellára osztott. Kezdetben mindegyik parcella üres. Jancsi bácsi be szeretné füvesíteni az egész kertjét, egy olyan fű fajtával ami a következket tudja:

- Ha egy parcella már füves, az füves is marad örökre.
- Ha egy parcellának két oldalszomszédja füves már, akkor ebben a parcellában is megterem egy idő után a fű.

Jancsi bácsi a lehető legkevesebb parcellát akar saját kezűleg befüvesíteni (mert nagyon lusta). Mennyi a minimális számú parcella, amik befüvesítésével egy idő után az egész kert füves lesz?

F/5. Adott egy jobbra és felfelé végtelen négyzetrács és néhány mezőn néhány kavics (egy mezőn lehet akár több kavics is). Egy lépésben kiválasztunk egy mezőt. Erről a mezőről egy kavics lekerül és a jobboldali és fenti szomszédos mezőkre pedig 1-1 kavics rákerül. Kezdetben egy kavics található a négyzetrács bal alsó mezőjén. Döntsük el, hogy ki lehet-e üríteni a tábla bal alsó 3×3 mezőjét!

2025. január 11.
Szakkörvezető: Fleiner Zsiga (zsgyfleiner@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

F/6. **Feladat:** Néhány követ helyezünk el egy végtelen (mindkét irányban kiterjedő) négyzetekből álló szalag mezőin, amelyeket az egész számok indexelnek. Egy műveletsorozatot hajtunk végre, ahol minden egyes lépés az alábbi két típus egyike lehet:

(a) Vegyünk el egy követ mind az $n-1$, mind az n mezőről, és helyezzünk egy követ az $n+1$ mezőre.

(b) Vegyünk el két követ az n mezőről, és helyezzünk egy-egy követ az $n-2$ és $n+1$ mezőkre.

Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen műveletsorozat elvezet egy olyan helyzethez, amelyben nem lehet további lépéseket végrehajtani, továbbá hogy ez a helyzet független a műveletek sorrendjétől!

F/7. (IMO 1986) Egy szabályos ötszög minden csúcsához egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy az öt szám összege pozitív. Ha három egymást követő csúcshoz rendre x, y, z számokat rendeltük, és $y < 0$, akkor az x, y, z számokat rendre $x + y$, $-y$, $z + y$-re cserélhetjük. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg legalább egy szám negatív.

Döntsük el, hogy csinálhatjuk-e ezt a folyamatot végtelen ideig!

F/8. Adott kezdetben 1 db 1-es és 9 db 0-ás egy zöld vagy egy fekete táblán. Egy lépésben két számot törölhetünk és helyükre az átlagukat írhatjuk (tehát a táblán mindig 10 darab szám fog szerepelni). Mi az a minimális szám, amit az 1-es helyére írhatunk a folyamat alatt?

F/9. Adott egy szabályos háromszög. Egy lépésben a háromszög egyik csúcsát letükrözhetjük egy másik csúcsára. Mutasd meg, hogy nem kaphatunk soha kisebb kerületű háromszöget, mint kezdetben.

F/10. Adott három *általános helyzetű* pont a síkban. Egy lépésben az egyik pontot átpöccinthetjük a másik két pont között. Mutasd meg, hogy csak páros lépésben érhetünk vissza a kezdeti feláláshoz!

F/11. Adott 100 piros és 100 zöld *általános helyzetű* pont a síkon. Mutassuk meg, hogy megadható 100 diszjunkt zárt szakasz, amik egyik végpontja piros, másik zöld!

F/12. (IMO 2011 - Szélmalmos feladat) Legyen S a sík pontjainak egy véges, legalább kételemű halmaza. Feltesszük, hogy az S halmaz semelyik három pontja sincs egy egyenesen.

Egy szélmalomnak nevezett folyamat során kiindulunk egy l egyenesből, amely az S halmaznak pontosan egy P pontját tartalmazza. Az egyenes a P forgástengely körül az óramutató járásával megegyező irányban forog addig, amíg először nem találkozik egy másik, S halmazba tartozó ponttal. Ekkor ez a Q pont lesz az új forgástengely, és az egyenes a Q pont körül forog tovább az óramutató járásával megegyező irányban egészen addig, míg újra nem találkozik egy S halmazba tartozó ponttal. Ez a folyamat vég nélkül folytatódik.

Bizonyítsuk be, hogy megválaszthatjuk a $P \in S$ pontot és a P-n átmenő l egyenest úgy, hogy az S halmaz minden pontja végtelen sokszor legyen a szélmalom forgástengelye.

2025. január 11.

Szakkörvezető: Fleiner Zsiga (zsgyfleiner@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

N/1. Adott egy véges egyszerű gráf, aminek minden foka páratlan. Kezdetben minden csúcsa fekete vagy fehér. Egy lépésben minden csúcs olyan színűre változik, amilyen színű a szomszédjainak többsége. Bizonyítsd be, hogy egy idő után minden csúcsnak vagy állandó marad, vagy minden lépésben változik a színe. (Azaz minden csúcs színe periodikus lesz 2 szerint.)

N/2. (IMO 2021) Két mókus, Bozontos és Ugrálós, 2021 diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat 1-től 2021-ig, és ásott 2021 kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat 2021 egymást követő lépésben. A k-adik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k-adik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.

2025. január 11.
Szakkörvezető: Fleiner Zsiga (zsgyfleiner@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Invariánsok és monovariánsok

Fleiner Zsiga szakköre

Házi feladatok

Beadási határidő:

HF/1. 100 szobában 2025 ember van valamilyen módon elosztva. Minden percben kijön egy szobából valaki és bemegy egy olyan szobába, ahol legalább annyi ember van, mint abban a szobában, ahonnan éppen kijött (vele együtt). Mutasd meg, hogy egy idő után az összes ember ugyan abban a szobába fog kerülni! Használj mono- vagy invariánst!

HF/2. Írjuk fel sorba 1-től n-ig a számokat. Egy lépésben 2-t kicserélhetünk. Lehetséges, hogy 2025 lépés után visszaérjünk az eredeti felíráshoz?

HF/3. Csocsesz és Potyi a következő játékot játsszák. Egy körbe felraknak 1000 pénzérmét. Felváltva lépnek. Egy lépésben a soron következő játékos elvehet 1 vagy 2 szomszédos pénzérmét bárhonnan (ha már nincsenek szomszédosak, akkor azt az opciót nem használhatja). Kinek van nyerő stratégiája?

Szakkörvezető: Fleiner Zsiga (zsgyfleiner@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu