Olimpiai szakkör 2024. december 13.

0. (A legutóbbi szakkörről maradt.) Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, …, k_n pedig adott egészek. Az $1,2,\ldots,n$ számok mind az $n!$ darab $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ permutációjára legyen

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b)-S(c))$-nek.

1. Adott $ABCD$ négyzet oldalaira befelé megrajzoljuk az ABK, BCL, CDM, és DAN egyenlő oldalú háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy a KL, LM, MN és NK szakaszok felezőpontjai az AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN és AN szakaszok felezőpontjaival együtt egy szabályos tizenkétszög csúcspontjai!

2. Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7, közvetlenül egymást követő tag összege negatív; míg bármely 11, közvetlenül egymást követő tag összege pozitív. Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának maximumát!

3. Legyen n adott, 2-nél nagyobb természetes szám! Jelöljük V_n -nel azt a halmazt, amelynek elemei: $1 + kn$, ahol $k = 1, 2, \ldots$. Egy $m \in V_n$ szám V_n -ben felbonthatatlan, ha nincsenek olyan $p, q \in V_n$ számok, amelyekre $pq = m$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $r \in V_n$ szám, amely több, mint egyféleképpen állítható elő V_n -ben felbonthatatlan számok szorzataként! (Azokat a felbontásokat, amelyek csak a V_n -ből vett tényezők sorrendjében különböznek egymástól, azonosnak vesszük.)

4. Legyenek a, b, A és B adott valós számok, továbbá legyen
$f(x) = 1 - a \cdot \cos x - b \cdot \sin x - A \cdot \cos 2x - B \cdot \sin 2x$.
Ismeretes, hogy x minden valós értéke esetén $f(x) \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$a^2 + b^2 \leq 2$ és $A^2 + B^2 \leq 1$.

5. Legyenek a és b pozitív egész számok! Ha $(a^2 + b^2)$-et elosztjuk $(a + b)$-vel, a hányados q, a maradék pedig r lesz. Állapítsuk meg az összes olyan a, b számpárt, amelyre $q^2 + r = 1977$.

6. Legyen f olyan függvény, amely értelmezve van minden n természetes számra, és amelynek függvényértékei is természetes számok! Álljon fenn továbbá az $f(n + 1) > f(f(n))$
egyenlőtlenség minden n-re! Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden n természetes számra: $f(n) = n$.