OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Nagyságrendi becslések a számelméletben

Kocsis Anett szakköre

Feladatok

F/1. Jelöljük p_k-val a k. prímszámot. Igazoljuk, hogy azon pozitív egész számok száma x-ig, melyek minden prímosztója kisebb mint p_k, legfeljebb **a)** $\sqrt{x}2^k$ **b)** $(\log_2 x)^k$.

F/2. Igazoljuk, hogy létezik olyan N szám, hogy minden $n \geq N$ esetén teljesül, hogy

$$2025 \log_2 n < n.$$

F/3. Végesek vagy végtelenek-e a következő összegek?
a)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$? **b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$ **c)** $\sum_{p \text{ prímszám}} \frac{1}{p}$?

F/4. (EGMO 2021/6) Létezik-e olyan nem negatív egész a szám, melyre az

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \ldots \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

egyenletnek több mint egymillió különböző (m, n) megoldása van, ahol m és n pozitív egészek?

F/5. Legyen a és b egynél nagyobb pozitív egészek. Igazoljuk, hogy van olyan többszöröse a-nak amelynek b-s számrendszerbeli alakja minden számjegyet tartalmaz 0-tól $b-1$-ig.

F/6. **a)** Igazoljuk, hogy $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

b) Mennyi $\nu_p(\binom{2m+1}{m})$ ha p egy olyan prímszám, melyre fennáll hogy $m+1 < p \leq 2m+1$?

F/7. Igazoljuk, hogy tetszőleges m egész szám esetén teljesül hogy

$$\prod_{p \leq m, p \text{ prím}} p \leq 4^{m-1}.$$

F/8. (China TST 2010) Adott egy k pozitív egész szám. Mutassuk meg hogy létezik olyan csak k-tól függő N szám, amelyre teljesül, hogy bármely $n \geq N$ esetén az $\binom{n}{k}$ kifejezésnek legalább k különböző prímosztója van.

F/9. Adjunk minél többféle bizonyítást arra hogy végtelen sok prímszám van ;-).

2024. december 7.
Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/10. (Polish TST) Legyenek a, b olyan nemnegatív egész számok, melyekre teljesül, hogy $2^n a+b$ négyzetszám minden n esetén. Igazoljuk, hogy $a = 0$.

F/11. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan szám van, amelyre n^2+1 négyzetmentes. A feladathoz használhatjuk a prímszámtétel egy gyenge alakját, vagyis hogy hogy $\pi(x) \leq 2\frac{x}{\log x}$ továbbá hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Egy számot négyzetmentesnek nevezünk, ha nem osztható semmilyen 1-nél nagyobb szám négyzetével.*

Házi feladatok

Beadási határidő: 2024. decmber 15. (vasárnap)

HF/1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges c valós számra a $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \dots$ számokat sorba lehet úgy rendezni, hogy a végtelen összeg c-hez tartson.

HF/2. Mennyi $\nu_p(\binom{2m}{m})$ ha p egy olyan prímszám, melyre fennáll hogy $\frac{2}{3}m < p \leq m$? És ha az teljesül, hogy $\sqrt{2m} < p \leq \frac{2}{3}n$?

HF/3. Véges vagy végtelen $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2(\log_2 n)}$? És $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^2}$?

HF/4. Jelölje $\pi(x)$ az x-nél nem nagyobb pozitív prímszámok számát. Igazoljuk, hogy végtelen sok n egész szám esetén teljesül, hogy $\frac{n}{\pi(n)}$ egész szám.

HF/5. Igazoljuk a 7-es feladat és 2-es házi feladat segítségével a Csebisev tételt, vagyis hogy minden n egész számra van n és $2n$ között prímszám. *Útmutatás: Azt fogjuk megszámolni, hogy a* $\binom{2n}{n}$ *kifejezést akarjuk megbecsülni. Ehhez kiszámoljuk, hogy melyik prím milyen hatványon szerepel a prímtényezős felbontásában. Csoportosítsuk a felbontásban a prímtényezőket: vegyük külön a* $\sqrt{2n}$*-nél kisebbeket, a* $\sqrt{2n}$ *és* $\frac{2}{3}n$ *közöttieket, a* $\frac{2}{3}n$ *és* n *köztieket, végül pedig az* n *és* $2n$ *köztieket. Mindegyik típusú prím kitevőjére adjunk felső becslést. Ennek segítségével igazoljuk, hogy ha nem lenne* n *és* $2n$ *között prím, akkor* $\binom{2n}{n}$*-re olyan felső becslést tudnánk adni, ami nem igaz.*

2024. december 7.

Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)

Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com