Olimpiai szakkör 2024. november 15.

0. A legutóbbi szakkörről: Határozzuk meg az összes olyan ($m;n$) párt, ahol m, n egész számok, amikre m, $n>2$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

1. . Jelentsenek x_i és y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) olyan valós számokat, amelyekre $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ és $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Legyen továbbá $z_1, z_2, \ldots, z_n$ az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok valamely elrendezése! Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Sum}\,(x_i - y_i)^2 \leq \mathrm{Sum}(x_i - z_i)^2$.

2. Egy tetszés szerinti ABC háromszög oldalaira (az ABC síkban) úgy szerkesztettük kifelé a BPC, CQA és ARB háromszögeket, hogy $PBC\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = 45°$, $BCP\sphericalangle = QCA\sphericalangle = 30° \circ$ és $ABR\sphericalangle = BAR\sphericalangle = 15°$. Bizonyítsuk be, hogy $QRP\sphericalangle = 90°$ és $QR = RP$.

3. Jelentse $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív egész számok olyan végtelen sorozatát, amelyre $a_k < a_{k+1}$, ha $1 \leq k$. Bizonyítsuk be, hogy ennek a sorozatnak végtelen sok eleme írható $a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q$ alakban, ahol x és y alkalmas pozitív egész számok, továbbá $p \neq q$.

4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 4444^{4444} szám jegyeinek összege, B pedig A számjegyeinek összege. Határozzuk meg B számjegyeinek összegét.

5. Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt. Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg. Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amit mindketten megoldottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amit legalább három lány és három fiú megoldott.

6. Az ABC háromszögben AP legyen az A-ból induló szögfelező, P a BC oldalon van. BQ pedig a B-nél lévő szögfelező, Q az AC oldalon van. Tudjuk, hogy BAC= 60° és AB+BP=AQ+QB. Mik az ABC szögeinek lehetséges értékei?