Feladatok

1. feladat (”M.B. trükk”) Legyen $0 < x$. Hol lesz a $2x^2 + \frac{1}{x}$ kifejezésnek minimuma?

2. feladat (”M.B. trükk”) Legyen $0 \leq a, b, c$ és $29a + 42b + c = 1$. Mi lesz $a^4 b^7 c^3$ maximális értéke?

3. feladat (Mildorf) Legyenek a, b, c pozitív valósak, melyekre $abc = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$$

4. feladat Legyen $0 < a, b, c$ és $abc = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

5. feladat (Kömal B.4824 - Szoldatics József) Legyenek x és y olyan valós számok, melyekre $xy = 1$ teljesül. Adjuk meg a

$$K = \frac{(x+y)^2 - (x-y) - 2}{(x+y)^2 + (x-y) - 2}$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét!

6. feladat Legyen $0 < x, y, z$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$$

7. feladat Legyen $0 < x, y, z$ és $x + y + z = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{1}{16}$$

---

8. feladat (1997 USAMO) Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

9. feladat Legyen $0 < x, y, z$ és $xyz = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{zx}{z^5 + zx + x^5} \leq 1$$

10. feladat Legyen $0 < a, b, c, d$ és $a + b + c + d = 4$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2$$

11. feladat Legyen $0 < a, b, c, d$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

12. feladat (Pham Kim Hung) Legyenek a, b, c pozitív valósak, melyek összege 3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

---

13. feladat Mutassuk meg, hogy $3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2\Big((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}\Big)$

14. feladat Legyenek a, b, c pozitív valósak, hogy $a + b + c = 1$. Mutasd meg, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$$

15. feladat Legyenek a, b, c pozitív valósak. Bizonyítsd be, hogy

$$(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$$

16. feladat Legyenek a, b, c pozitív számok melyek összege 3. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

17. feladat Legyenek a, b, c pozitív valósak, melyre $abc = 1$. Igazoljuk, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{ab}\right)\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\right)\left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{ca}\right) \leq 1$$

18. feladat Legyenek a, b, c pozitív valósak. Igazoljuk, hogy

$$1 + 2abc + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Extrák

19. feladat (Pham Kim Hung) Legyenek a, b, c pozitív valósak. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a + 2b}{c + 2b} + \frac{b + 2c}{a + 2c} + \frac{c + 2a}{b + 2a} \geq 3$$

20. feladat (Belarus TST) Legyenek a, b, c pozitív valósak, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$$

21. feladat (Mildorf) Legyenek a, b, c pozitív valósak. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{a(1 + b)} + \frac{1}{b(1 + c)} + \frac{1}{c(1 + a)} \geq \frac{3}{1 + abc}$$

22. feladat (APMO 2004/5) Legyenek a, b, c pozitív egészek. Igazoljuk, hogy

$$(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

23. feladat (Vasile Cirtoaje) Legyenek a, b, c pozitív valósak. Mutassuk meg, hogy

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

Mikor van egyenlőség? (Ez szerintem reménytelenül nehéz feladat, azért raktam ide, hogy legyen a feladatsoron egy ilyen. :))

Egy gyengébb variáció:

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a + ab^3 + bc^3 + ca^3)$$