Olimpiai szakkör 2024. október 11.

0. A legutóbbi szakkörről: Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló $(a;b)$ számpárt, amire $a^2:(2ab^2-b^3+1)$ pozitív egész.

1. Három játékos: A, B és C a következő játékot játssza: három kártya mindegyikére egy-egy egész szám van írva. Erre a három számra (p, q és r) fennáll, hogy $0<p<q<r$. A kártyákat összekeverik, majd szétosztják úgy, hogy minden játékos kapjon egyet. Ezután a játékosoknak annyi golyót adnak, amennyit kártyájuk mutat. Utána összeszedik a kártyákat, a kapott golyók azonban a játékosoknál maradnak.
Ezt a játékot (a kártyák összekeverése és szétosztása, a golyók odaadása, a kártyák összeszedése) legalább kétszer játsszák végig. Az utolsó játszma után A-nak 20, B-nek 10, míg C-nek 9 golyója van. Ezenkívül B azt is tudja, hogy utolsó alkalommal ő r darab golyót kapott. Kinek jutott először q darab golyó?

2. Jelölje A, B, C rendre egy háromszög csúcsait; α, β és γ pedig ugyanilyen sorrendben a csúcsoknál levő szögeinek mérőszámát. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor található az AB szakaszon olyan D pont, amelyre a CD szakasz hossza az AD és BD szakaszok hosszának mértani közepe, ha

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leq\sin^2(\gamma/2).$$

3. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 2^{3k}$ semmilyen természetes egész n esetén sem osztható 5-tel!

4. Egy 8×8 mezőből álló sakktáblát úgy vágunk szét p darab téglalapra, hogy egyetlen mezőt sem vágunk ketté. Mindegyik ilyen szétvágásnak ki kell elégítenie a következő feltételeket:
(1) Minden egyes téglalapnak ugyanannyi fehér mezőt kell tartalmaznia, mint feketét.
(2) Ha a_i jelöli az i-edik téglalapban levő fehér mezők számlát, akkor fenn kell állnia az $a_1<a_2<...<a_p$ egyenlőtlenségsorozatnak.
Keressük meg p-nek azt a legnagyobb értékét, amelyre létezik ilyen szétvágás. Továbbá állítsuk elő p-nek ehhez az értékéhez tartozó valamennyi a_1, a_2, ..., a_p sorozatot.

5. Állapítsuk meg az összeg értékkészletét, ahol a, b, c és d tetszés szerinti pozitív számokat jelölnek: $S=a/(a+b+d)+b/(a+b+c)+c/(b+c+d)+d/(c+d+a)$.

6. Határozzuk meg az összes olyan $(m;n)$ párt, ahol m, n egész számok, amikre $m, n>2$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire $\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ egész szám.