1 Év eleji ismétlés

1/1. Az ABC háromszög BC oldalegyenesén helyezkednek a P, Q pontok. Ekkor az (APQ) kör akkor és csak akkor érinti az (ABC) kört, ha a P, Q pontok A-izogonálisak.

1/2. Az ABC háromszög síkjában lévő P pontra $PBA\angle = ACP\angle$. Legyen Q az a pont, melyre $BPCQ$ parallelogramma. Ekkor a P, Q pontok A-izogonálisak.

1/3. Az ABC háromszög AD magasságvonalán legyen X egy pont. A BX, CX egyenesek messék az AC, AB egyeneseket rendre az E, F pontokban. Mutassuk meg, hogy az AD egyenes felezi az $EDF\angle$-et.

1/4. Az ABC háromszögben legyen P pedál háromszöge $A'B'C'$. Ekkor az A, B, C csúcsokból a $B'C', C'A', A'B'$ oldalakra állított merőlegesek konkurrensek.

2 Az izogonalitáson túl

2/1. Az ABC háromszögben BB_1, CC_1 magasságvonalak, AD átmérője a körülírt körnek. Legyen $BB_1 \cap DC_1 = E$, $CC_1 \cap DB_1 = F$. Bizonyítsuk be, hogy $CAE\angle = BAF\angle$.

2/2. Az ABC háromszögben B_1, C_1 jelöli az AC, AB oldalak felezőpontjait. A CC_1, BB_1 félegyenesek az (ABC) körhöz húzott B-beli, illetve C-beli érintőegyenest rendre a K, L pontokban metszik el. Mutassuk meg, hogy $BAK\angle = CAL\angle$.

2/3. Az $ABCD$ trapéznak $(BC \parallel AD)$ az átlói O-ban találkoznak. Az M, N pontok a BC, AD szakaszok belsejében vannak. Az (AMC) körhöz húzott érintő C-ben az NB félegyenest P-ben, míg a (BND) körhöz húzott érintő D-ben az MA félegyenest R-ben metszi el. Igazoljuk, hogy $BOP\angle = AOR\angle$.

2/4. Az ABC háromszög A-nál lévő szöge derékszög. Legyen M az AB oldal felezőpontja. A D pont az AMC háromszög AN súlyvonalán van úgy, hogy $ACD\angle = BCM\angle = \alpha$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $DBC\angle = \alpha$.

2/5. Adott egy ABC háromszög. A D_C pont olyan, hogy az AD_C, BD_C egyenesek mind érintik az (ABC) kört. Vetítsük le D_C-t az AB, BC, CA egyenesekre, a vetületeken átmenő kör messe az AB egyenest másodszorra C'-ben. Hasonlóan definiáljuk az A', B' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', CC' egyenesek egy ponton mennek át.

2/6. Az ABC háromszög körülírt köre ω, annak középpontja O. Az $A', D \in \omega$ pontokra AA' átmérője ω-nak és AD a $BAC\angle$ belső szögfelezője. Jelölje D' a D pont tükörképét BC-re. Az $A'D'$ egyenes ω-t E-ben metszi másodszorra. A $D'E$ szakasz felezőmerőlegese az AB, AC egyeneseket rendre az F, G pontokban metszi el. Igazoljuk, hogy $FOG\angle = 180° - 2BAC\angle$.

2/7. Legyen P a BC szakasz felezőmerőlegesének egy pontja, illetve P^* a P pont inverze az (ABC) körre nézve. Ekkor P és P^* A-izogonálisak.

2/8. Az ABC háromszögben A-nál derékszög van. Az x, y egyenesek A-ban metszik egymást és merőlegesek egymásra. Egy $X \in x$ pontra legyen y_B és y_C az y egyenes tükörképe rendre az XB, XC egyenesekre nézve. Jelölje Y az y_B, y_C egyenesek metszéspontját. Határozzuk meg Y mértani helyét, ha X fut az x egyenesen.

3 Kúpszeletek

3/1. Ha A, B, C egy egyenlőszárú hiperbola három pontja, akkor az ABC háromszög magasságpontja is rajta van ezen a hiperbolán.

3/2. Bizonyítsuk be a Pascal-tételt!

3/3. Az ABC háromszögben H és O rendre a magasságpont és a köréírt kör középpontja. Legyen $CH \cap AB = D$, $AH \cap CO = E$, $AO \cap BC = F$, $FH \cap CO = P$, $DE \cap BO = Q$. Mutassuk meg, hogy $BAP\angle = CAQ\angle$.

3/4. Az ABC háromszögben P, Q izogonális konjugáltak. Legyen $BP \cap (ABC) = R \neq B$, $CQ \cap (ABC) = S \neq C$, $RS \cap PQ = T$. Igazoljuk, hogy AT érinti az (APQ) kört.

3/5. Az ABC háromszögben O a körülírt kör középpontja, H a magasságpont. Az AOH, BOH, COH háromszögek körülírt köreinek középpontjai rendre O_a, O_b, O_c. Mutassuk meg, hogy az AO_a, BO_b, CO_c egyenesek konkurrensek.

3/6. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I. A CI egyenes az AB-t D-ben metszi el. Az (ABC) körön legyen T az A-t tartalmazó BC ív felezőpontja, M pedig a B-t nem tartalmazó AC ív felezőpontja. Bizonyítandó, hogy ha $MD \cap AT = N$, akkor $BM \parallel CN$.

3/7. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Legyen D az I vetülete a BC egyenesen. Jelölje J, K az ABD, ACD háromszögek beírt köreinek középpontjait. A JK, AD egyenesek M-ben, a BK, CJ egyenesek P-ben metszik egymást. Az R pont az AD szakaszon van úgy, hogy $AR = DM$. Húzzunk párhuzamost R-en keresztül JK-val, ez messe el a CI egyenest S-ben. Igazoljuk, hogy a BS, IR, DP egyenesek egy ponton mennek át.

4 Versenyfeladatok

4/1. (ISL 2007) Az $ABCD$ trapéz átlói P-ben metszik egymást. A Q pont a párhuzamos BC, AD egyenesek között van úgy, hogy $AQD\angle = CQB\angle$ és a CD egyenes szétválasztja P-t és Q-t. Mutassuk meg, hogy $BQP\angle = DAQ\angle$.

4/2. (ISL 2012) Az $ABCD$ húrnégyszög AC, BD átlói E-ben metszik egymást. Az AD, BC egyenesek F-ben metszik egymást úgy, hogy B az F, C és A az F, D pontok között helyezkedik el. A G pontra teljesül, hogy az $ECGD$ parallelogramma. Jelölje H az E pont tükörképét az AD egyenesre nézve. Bizonyítsuk be, hogy a D, H, F, G pontok egy körön vannak.

4/3. (MEMO 2024) Legyen ABC egy hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög. Válasszunk egy B-n és C-n áthaladó ω kört, melynek az AB és AC szakaszokkal vett második metszéspontja rendre $D \neq A$ és $E \neq A$. Legyen BE és CD metszéspontja F. Legyen G az a pont az ABF háromszög köréírt körén, melyre GB érinti ω-t. Hasonlóan legyen H az a pont az ACF háromszög köréírt körén, melyre HC érinti ω-t. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan, ω választásától független $T \neq A$ pont, melyre az AGH háromszög köréírt köre áthalad T-n.

4/4. (ISL 2008) Adott az $ABCD$ konvex négyszög. Bizonyítsd be, hogy pontosan akkor létezik olyan P pont a háromszög belsejében, melyre

$$PAB\angle + PDC\angle = PBC\angle + PAD\angle = PCD\angle + PBA\angle = PDA\angle + PCB\angle = 90°,$$

ha a négyszög átlói merőlegesek.

4/5. (ISL 2000) Léteznek-e olyan D, E, F pontok a hegyesszögű ABC háromszög BC, CA, AB oldalain, melyekre az AD, BE, CF egyenesek konkurrensek és

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH = r,$$

ahol O a körülírt kör középpontja, r annak a sugara és H a magasságpont?

4/6. (ISL 2022) Az ABC hegyesszögű háromszögben AD magasságvonal. Egy adott P pontra legyen k a $PBC\angle$, míg l a $PCB\angle$ szögfelezője. Legyen $k \cap AC = E$ és $l \cap AB = F$. Az EF egyenes az AD magasságvonalat Q-ban metszi el. Igazoljuk, hogy azon P pontokra, melyekre k és l az AD egyenesen metszik egymást, a PQ egyenes átmegy egy fix ponton.

4/7. (Chinese TST 2024) Az ABC háromszögben $A\angle > B\angle > C\angle$. Az AC_1B, CB_1A háromszögek azonos körüljárással hasonlóak és egyenlőszárúak rendre AB, CA alapokkal. A BB_1, CC_1 egyenesek T-ben metszik egymást. Mutassuk meg, hogy ha az A, B, C, B_1, C_1, T pontok különbözőek, akkor az $ATC\angle$ nem derékszög.

5 *********** nehéz feladatok

5/1 Adott egy ABC háromszög. Mutassuk meg, hogy egy l egyenesre pontosan akkor mennek át a $P \in l$ pontok pedál háromszögeinek körülírt körei egy fix ponton, ha l átmegy az (ABC) kör középpontján.

5/2 Adott az ABC háromszög és a P pont. Jelölje Q az (ABC) kör és a P középpontú A, B, C pontokon átmenő ellipszis negyedik metszéspontját. Jelölje a P pont antikomplementerének izogonális konjugáltjának antikomplementerét R, ahol egy X pont antikomplementere az az X' pont, melyre $\overrightarrow{X'G} = 2\overrightarrow{GP}$, ahol G a súlypont. Mutassuk meg, hogy Q Steiner-egyenese átmegy R-en.

5/3 Az általános helyzetű A, B, C, A', B', C' pontokról tudjuk, hogy az AA', BB', CC' egyenesek mind érintik ugyanazt az egyenlő szárú hiperbolát rendre az A, B és C pontokban, továbbá hogy az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre megegyezik az ABC háromszög Feuerbach-körével. Jelölje $s(A')$ az A' pontnak az ABC háromszög talpponti háromszögéhez tartozó Simson-egyenesét, A^* pedig legyen az A-ból az $s(A')$-re állított merőlegesnek és a $B'C'$ egyenesnek a metszéspontja. Hasonlóan definiáljuk a B^* és C^* pontokat. Mutassuk meg, hogy az A^*, B^* és C^* pontok egy egyenesen vannak.

Házi feladatok

HF/1. Az ABC háromszögben $AB = BC$. A P, Q pontok a háromszög belsejében vannak úgy, hogy $BAP\angle = QCA\angle$, továbbá a B, P, Q pontok egy egyenesen vannak. Mutassuk meg, hogy $PAQ\angle = PCQ\angle$.

HF/2. Az ABC háromszög magasságpontja H, köréírt körének középpontja O. Mutassuk meg, hogy az AOH háromszög magasságpontjának izogonális konjugáltja rajta van az OH egyenesen.

HF/3. Az ABC háromszögben $AB < BC$. A C-hez tartozó belső szögfelező a B-n átmenő AC-vel párhuzamos egyenest P-ben metszi el. Az (ABC) körhöz húzott érintő B-ben ezt a CP szögfelezőt R-ben metszi el. Az R pontot tükrözve az AB egyenesre az R' pontot kapjuk. Igazoljuk, hogy $R'PB\angle = RPA\angle$.

HF/4. Az ABC háromszög magasságpontja H. Jelölje A' az A pont tükörképét a BC oldal felezőpontjára. A B', C' pontok rendre az AB, AC egyeneseken vannak úgy, hogy a B, B', C, C' pontok egy körön vannak. Ha a BB', CC' egyenesek P-ben metszik egymást, akkor bizonyítandó, hogy P rajta van az A, B, C, A', H pontok által meghatározott hiperbolán.

HF/5. A P pont az ABC háromszög belsejében fekszik. Azon P-ből induló félegyenesek, melyek derékszögben metszik el az oldalakat, a körülírt kört rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban metszik el. Mutassuk meg, hogy azon P pontokra, melyekre az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy Q pontban konkurrensek, a PQ egyenes átmegy egy fix ponton.