OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Kitalálós játékok

Kovács Benedek szakköre

Feladatok

F/1. Sándor és Tamás a következő játékot játsszák: Sándor gondolt a $H = \{1, 2, ..., 32\}$ halmaz valamelyik elemére, Tamás pedig eldöntendő kérdéseket tehet fel Sándornak a gondolt számmal kapcsolatban. Tamás célja, hogy kitalálja a számot. Legkevesebb hány kérdésre van szüksége?

F/2. Borbála és Cecil a következő játékot játsszák: Borbála gondolt a 8×8-as sakktábla egy mezőjére, Cecil minden lépésben rámutathat egy mezőre és megkérdezheti, hogy az a gondolttól hány királylépésre van. Legkevesebb hány kérdésből tudja kitalálni a gondolt mezőt?

F/3. Egy sorban 100 ember áll, mindegyikük lovag vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Van egy rögzített $1 \leq k \leq 100$ paraméter. Te minden lépésben rámutathatsz k emberre, és megkérdezhetsz egy embert, hogy a rámutatottak között páros sok lókötő van-e. (Az ember lehet rámutatott is vagy nem is.) Erre ő igennel vagy nemmel felel. Ki lehet-e találni (k függvényében), hogy pontosan ki lovag és ki lókötő? Ha igen, legkevesebb hány lépésben?

F/4. A királylány kastélya 3 szintes, ahol minden szinten egy egyenes folyosó van, melyről 1-től 100-ig számozott szobák nyílnak. A királylány minden éjfélkor vagy álköltözik az egyik szomszédos szobába, vagy az ablakon keresztül egy szinttel feljebb vagy lejjebb mászik az azonos sorszámú szobába. A herceg célja, hogy megtalálja a királylányt. Ehhez minden délben benyithat 2 szobába, és megnézheti, hogy ott van-e. Van-e olyan stratégia, amellyel biztosan megtalálja?

F/5. Van egy $n \times n$-es négyzet alakú pálya, melyen Anna és Dia az amőba játék egy különleges változatát játssza. A játékmester előre kijelöl bizonyos, k elemű mezőhalmazokat, ezek lesznek a *nyerő kombinációk*. A játékban felváltva elhelyez a két játékos egy-egy jelet egy még üres mezőbe, Anna kezd. Anna akkor nyer, ha a saját jeleiből kirak egy nyerő kombinációt. Dia nyer, ha betelik a tábla és Anna nem rakott ki nyerő kombinációt. Lássuk be, hogy ha a nyerő kombinációk száma kevesebb 2^{k-1}-nél, akkor Dia nyerni tud. *Például ha $n = k = 4$, akkor a játékmester mondhatja azt az elején, hogy legyenek a nyerő kombinációk a sorok, a két átló és együtt a négy sarokmező, ez 7 kombináció lenne.*

F/6. Teó gondolt 2016 egész számra: x_1, ..., x_{2016}, melyek közül mind azonos, egyet kivéve. Leó minden lépésben mondhat y_1, ..., y_{2016} egészeket, és megkérdezheti Teótól az

$$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_{2016}y_{2016}$$

összeg értékét.
(a) Legkevesebb hány kérdéssel tudja kitalálni az x_i számokat, ha tudjuk, hogy a kakukktojás szám értéke 0?
(b) És ha ezt nem tudjuk?

2024. október 19.
Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

F/7. Elemér rajzolt egy G egyszerű gráfot, melynek n csúcsa van, ezek 1-től n-ig számozottak. Ferenc nem ismeri G-t, de kérdéseket tehet fel Elemérnek vele kapcsolatban. Minden lépésben mondhat két számot ($i < j$), és megkérdezheti, hogy az i. és j. csúcsok között fut-e él G-ben. Ferenc szeretné minél kevesebb kérdéssel eldönteni, hogy összefüggő-e G, segítsünk neki ebben.

F/8. A *hazudós játékot* két játékos játssza: A és B. A játék szabályaiban szerepel két pozitív egész szám: k és n, ezek értékét mindkét játékos ismeri.

A játék megkezdésekor A választ két egész számot: x-et és N-et, amikre $1 \leq x \leq N$. A az x számot titokban tartja, viszont N-et őszintén megmondja B-nek. B ezután megpróbál x-re vonatkozó információt szerezni A-tól a következő típusú kérdésekkel: B minden kérdésében megadja pozitív egész számok egy tetszőleges S halmazát (olyan S halmazt is megadhat, amit már korábban is megadott), és azt kérdezi A-tól, hogy x eleme-e ennek az S halmaznak. B akárhány ilyen típusú kérdést feltehet. A-nak B minden kérdésére a kérdés elhangzása után azonnal *igennel* vagy *nemmel* kell válaszolnia, de hazudhat is; az egyetlen kikötés az, hogy bármely egymás utáni $k+1$ válasz közül legalább egynek igaznak kell lennie.

Miután B annyiszor kérdezett, ahányszor csak akart, mondania kell egy legfeljebb n elemű X halmazt. Ha $x \in X$, akkor B nyer, különben veszít.

Bizonyítsuk be, hogy:

(a) Ha $n \geq 2^k$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.

(b) Minden elég nagy k-ra van olyan $n \geq 1{,}99^k$ egész szám, amire B-nek nincs nyerő stratégiája.

F/9. Legyen $k \geq 1$ egész. Van 2^{2^k} érménk, melyek közül pontosan az egyik hamis. Végtelen sok szolgálati kutyánk van, de sajnos egyikük beteg (nem tudjuk, melyik). Egy lépésben egy kutyával megszagoltathatunk néhány érmét, és a kutya vagy ugat, vagy nem. Ha egészséges a kutya, akkor pontosan akkor ugat, ha köztük van a hamis érme. Ha beteg, akkor semmit nem jelent, hogy ugat-e. Határozzuk meg a hamis érmét $2^k + k + 2$ lépésből.

HF/1. Alex és Bob játszanak. Alex gondol egy 1 és 1000 közti n egész számra. Bob minden lépésben mondhat egy 10 és 30 közti k egészt, és válaszként megkapja $[n, k]$ értékét. Hány lépésből tudja meghatározni n-et?

HF/2. Mi a helyzet az **F/4.** feladatban, ha a kastély 4 szintes, de minden szinten csak 4 szoba van 1-től 4-ig számozva?

HF/3. Mi a helyzet az **F/7.** feladatban, ha Ferenc nem azt szeretné eldönteni, hogy összefüggő-e G, hanem azt, hogy van-e olyan pont, amelyik mindegyik másikkal össze van kötve?

2024. október 19.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Kitalálós játékok

Kovács Benedek szakköre

Házi feladatok

Beadási határidő: 2024. október 29. (kedd)

HF/1. Alex és Bob játszanak. Alex gondol egy 1 és 1000 közti n egész számra. Bob minden lépésben mondhat egy 10 és 30 közti k egészt, és válaszként megkapja $[n, k]$ értékét. Hány lépésből tudja meghatározni n-et?

HF/2. A királylány kastélya 4 szintes, ahol minden szinten egy egyenes folyosó van, melyről 1-től 4-ig számozott szobák nyílnak. A királylány minden éjfélkor vagy álköltözik az egyik szomszédos szobába, vagy az ablakon keresztül egy szinttel feljebb vagy lejjebb mászik az azonos sorszámú szobába. A herceg célja, hogy megtalálja a királylányt. Ehhez minden délben benyithat 2 szobába, és megnézheti, hogy ott van-e. Van-e olyan stratégia, amellyel biztosan megtalálja?

HF/3. Elemér rajzolt egy G egyszerű gráfot, melynek n csúcsa van, ezek 1-től n-ig számozottak. Ferenc nem ismeri G-t, de kérdéseket tehet fel Elemérnek vele kapcsolatban. Minden lépésben mondhat két számot ($i < j$), és megkérdezheti, hogy az i. és j. csúcsok között fut-e él G-ben. Ferenc szeretné minél kevesebb kérdéssel eldönteni, hogy van-e olyan pont G-ben, amelyik mindegyik másikkal össze van kötve. Legkevesebb hány kérdésre van szüksége?

2024. október 19.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu