Olimpiai szakkör 2024. szeptember 20.

1. Mekkora lehet az x és y egész számok szorzata, ha $(6x)_5 + 4y = 508$, és $(6y)_5 - (2x)_7 = 64$, ahol az m és k egész számokra $(m)_k$ értéke k-nak az m-hez legközelebbi többese.
2. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben $AB<AC<BC$. Jelölje w az ABC háromszög beírt körét, I pedig w középpontját. Legyen X a BC egyenes C-től különböző pontja úgy, hogy az X-en átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes érinti w-t. Továbbá legyen Y a BC egyenes B-től különböző pontja úgy, hogy az Y-on átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes érinti w-t. Messe az AI egyenes az ABC háromszög körülírt körét a $P \neq A$ pontban. Jelölje K és L az AC, illetve AB szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $KIL\angle + YPX\angle = 180°$.
3. Van hat golyónk, két piros, két fehér és két zöld. Minden színből az egyik 15, a másik 16 dkg. Egy kétkarú mérleggel eldönthető-e két méréssel, melyik golyók a nehezek?
4. Határozzuk meg az összes α valós számot, amelyre minden pozitív egész n esetén teljesül, hogy n osztja a következő egész számot: $[\alpha]+[2\alpha]+\ldots+[n\alpha]$.
5. Négy ember szeretne átkelni egy függőhídon, amin egyszerre max. két ember mehet át. Egy lámpásuk van, csak azzal lehet közlekedni. Az első 10, a második 5, a harmadik 2 a negyedik 1 perc alatt tud átmenni. (Lassítani mindenki tud, gyorsítani senki.) Hány perc kell, hogy mind a négyen átérjenek?
6. Igazoljuk, hogy ha egy 10 elemű halmaz minden eleme kétjegyű természetes szám, akkor van két közös elem nélküli részhalmaza, amelyben az elemek összege egyenlő egymással.
7. Biz. minden húrnégyszög felvágható n darab húrnégyszögre, ha n 4-nél nem kisebb természetes szám.
8. Kiválasztható-e az egységkörön 2024 pont úgy, hogy közülük bármely kettő által meghatározott húr hossza racionális legyen?
9. Határozzuk meg azokat a pozitív p prímeket, amelyekre a $(2^{p-1}-1) / p$ tört értéke négyzetszám.