OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Sorozatok

Borbényi Marci szakköre

Feladatok

F/1. Legyen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény úgy, hogy $f(0,0) = 2$, $f(m+1,n) = f(m,n) + m$ és $f(m,n+1) = f(m,n) - n$ minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén. Soroljátok fel azon (p,q) párokat, amikre $f(p,q) = 2024$.

F/2. Legyen $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = a_{n-1}^2 - na_n$. Találjatok explicit képletet a sorozatra.

F/3. Legyen x_n valós számokból áll sorozat úgy, hogy

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$n = 3, 4, \ldots$ esetén. Mik azon (x_1, x_2) párok, amikre végtelen sok n esetén $x_n \in \mathbb{Z}$?

F/4. Legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ és $b_0, b_1, b_2, \ldots$ valós számok két végtelen sorozata, melyekre $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ és

$$a_{k+1} = b_k, \quad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

teljesül minden $k \geq 0$ egészre. Bizonyítsátok be, hogy $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

F/5. Legyen $x_0 = a$, $x_1 = b$, és

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Bizonyítsátok be, hogy ha sorozat periodikus, akkor $ab = 1$.

F/6. Legyen $a_1 = 2$, illetve

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Találjátok explicit formulát a_n-re.

2024. szeptember 28.

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

F/7. Legyen a_n pozitív számoknak szigorúan növő sorozata úgy, hogy

$$a_{n+2} = (a_{n+1} - a_n)^{\sqrt{n}} + n^{-\sqrt{n}}.$$

Bizonyítsátok be, hogy az a_n sorozat nem korlátos.

F/8. Legyen $a_1 = 2024,\ a_2 = 2^{2024}$, illetve $n \geq 1$ esetén

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \lfloor \frac{a_n}{n} \rfloor.$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik c és M úgy, hogy bármely $n \geq M$ esetén $na_{a_n}+c$ négyzetszám.

F/9. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valósakból álló sorozat. Bizonyítsátok be, hogy végtelen sok n-re $1 + a_n > \sqrt[n]{2}a_{n-1}$.

F/10. Egy $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ végtelen sorozat esetén jelölje $\Delta\underline{a}$ a differenciasorozatot, azaz $\Delta\underline{a} = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots)$. Tegyük fel, hogy $\Delta(\Delta\underline{a})$ a konstans 1 sorozat, és $a_{19} = a_{92} = 0$. Mennyi a_1 értéke?

F/11. Pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot *jó*nak nevezünk, ha

(a) a_1 négyzetszám;

(b) minden $n \geq 2$ esetén a_n az a legkisebb pozitív egész, amire

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

négyzetszám.

Bizonyítsd be, hogy minden jó sorozatra létezik k úgy, hogy $a_n = a_k$ minden $n \geq k$ esetén.

2024. szeptember 28.

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Sorozatok

Borbényi Marci szakköre

Házi feladatok

Beadási határidő: 2024. október 6. (vasárnap)

HF/1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$. Számítsátok ki az

$$f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

összeg értékét.

HF/2. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval: $a_1 = 4, \quad a_2 = 2 \quad$ és $\quad a_{n+1} = \dfrac{na_n^2}{na_n^2 - (n+1)a_n + n + 1}$, ha $n \geq 2$. Igazoljátok, hogy

$$a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

bármely $n \geq 1$ esetén.

HF/3. Legyen $x_1 = 2$ és $n \geq 1$ esetén $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$. Bizonyítsátok be, hogy

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$

HF/4. Legyen $a_0 = 1$, és

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsátok be, hogy

(a) a_n pozitív egész minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;

(b) $a_n a_{n+1} - 1$ négyzetszám.

2024. szeptember 28.

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu