

## 4. válogatóverseny

2024. április 23.

**4. Feladat** Az  $ABCD$  húrnégyszögben  $BAD\angle < ADC\angle$ . A húrnégyszög köré írt körön az  $A$ -t nem tartalmazó  $CD$  ív felezőpontja  $M$ . Tegyük fel, hogy van olyan  $P$  pont az  $ABCD$  belsejében, amelyre  $ADB\angle = CPD\angle$  és  $ADP\angle = PCB\angle$ . Igazoljuk, hogy az  $AD$ ,  $PM$  és  $BC$  egyenesek egy ponton mennek át.

**5. Feladat** Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  pozitív egészek úgy, hogy a következő  $n+1$  szorzat értéke szigorúan növekvő számtani sorozatot alkot a megadott sorrendben:

$$a_1a_2a_3\dots a_n; \quad b_1a_2a_3\dots a_n; \quad b_1b_2a_3\dots a_n; \quad \dots; \quad b_1b_2b_3\dots b_n.$$

Határozzuk meg a számtani sorozat differenciájának legkisebb lehetséges értékét.

**6. Feladat** A kincseskamrában Aladdinnak van 2023 ládikája; kezdetben mindegyik üres és nyitott. Aladdin mindennap hoz egy új drágakövet, és beleteszi valamelyik nyitott ládikába. A kincseskamrát egy alvó dzsinn őrzi, aki minden új drágakő érkezése után fölébred és

- ha legalább két ládika nyitott, akkor egy nyitott ládikát bezár és visszafekszik aludni,
- ha pedig csak egy ládika nyitott, akkor mind a 2022 bezárt ládikát egyszerre kinyitja és visszafekszik aludni.

Ez ismétlődik mindennap, a végtelenségig. Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $C > 0$  konstans, amelyre Aladdin el tudja érni, hogy soha semelyik két ládikában lévő drágakövek számának különbsége se haladja meg  $C$ -t, függetlenül attól, hogy a dzsinn milyen módon választ bezárandó ládikát.

*Munkaidő: 4 óra 30 perc.*

*Mindegyik feladat 7 pontot ér.*

*Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2024-es IMO végéig, 2024. július 22-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.*