3. válogatóverseny

2024. április 22.

1. Feladat Legyenek m és n 1-nél nagyobb pozitív egészek. Egy $m \times n$-es tábla minden mezőjén van egy érme, és kezdetben minden érmén az írás van felül. Egy *lépés* a következőt jelenti:

(i) kiválasztunk egy 2×2-es részt (azaz négy olyan érmét, mely két szomszédos sor és két szomszédos oszlop metszéspontjaiban található),

(ii) a kiválasztott részben a jobb felső és a bal alsó mezők közül pontosan egyet kiválasztunk, ezen a mezőn az érme nem mozdul, a többi három mezőn lévő érméket megfordítjuk.

Határozzuk meg az összes (m, n) párt, amire véges sok lépés után el tudjuk érni, hogy minden érmén a fej legyen felül.

2. Feladat Legyenek a_1, a_2, ..., a_{2023} az 1, 2, ..., 2023 számok valamely permutációja, amelyre $|a_1 - a_2|$, $|a_2 - a_3|$, ..., $|a_{2022} - a_{2023}|$ az 1, 2, ..., 2022 valamely permutációja.

Bizonyítsuk be, hogy $\max(a_1, a_{2023}) \geq 507$.

3. Feladat Legyen a hegyesszögű ABC háromszög köré írt kör ω, ennek középpontja O. Legyenek $D \neq B$ és $E \neq C$ olyan pontok ω-n, amelyekre $BD \perp AC$ és $CE \perp AB$. Legyen a CO és AB egyenesek metszéspontja X, a BO és AC egyenesek metszéspontja Y.

Bizonyítsuk be, hogy a BXD és CYE háromszögek köré írt körök egyik metszéspontja az AO egyenesen van.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.