Surányi János emlékverseny

2024/2. Olimpiai válogatóverseny
Bath Július 11-22.

1. Az ABC háromszögben $AC>BC$. Legyen ω és r rendre az ABC háromszög köré írt kör és annak sugara. Az AC szakasz egy belső P pontjára $BC=CP$. Jelölje P merőleges vetületét az AB egyenesen S. A B-ből induló BP félegyenes ω-val való, B-től különböző metszéspontja D. Legyen Q az SP egyenes azon pontja, amelyre $PQ=r$ és S, P, Q az egyenesük mentén ebben a sorrendben helyezkednek el. Végül tekintsük az A-n áthaladó CQ-ra merőleges egyenest, ez a B-n áthaladó DQ-ra merőleges egyenest E-ben metszi. Igazoljuk, hogy E rajta van az ω körön.

2. Legyen $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg mindazon $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$x\big(f(x)+f(y)\big) \geq \big(f\big(f(x)\big)+y\big)f(y).$$

3. Legyen $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ pozitív egészeknek egy végtelen sorozata úgy, hogy $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ osztható az a_{k+1} számmal minden pozitív egész k esetén. Tegyük fel, hogy végtelen sok olyan p prím van, amelyhez létezik olyan k, amire a_k osztható p-vel. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén létezik olyan k, amire a_k osztható n-nel.