IMO / MEMO / EGMO válogatóverseny

2023. november 17., péntek

1. Adott egy $n \geq 5$ egész szám. Mely $a_1, ..., a_n$ pozitív egész számokra teljesül, hogy

$$a_1 + ... + a_n = 2n + 3 \qquad \text{és} \qquad a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 5n \quad ?$$

2. Az ABC háromszögben $AB \neq AC$. A háromszög magasságpontja M, a BC oldalának felezőpontja pedig D. Az E pont a BAC szög szögfelezőjén helyezkedik el úgy, hogy AE és ME merőlegesek egymásra. Az F pontot úgy vesszük fel, hogy $AEMF$ egy téglalap legyen. Bizonyítsd be, hogy ekkor D, E és F egy egyenesen helyezkednek el.

3. Legyen $p > 3$ prímszám és $1 < n < p - 1$ egész szám. Egy $2 \times n$-es táblázat kitöltését *káprázatosnak* nevezzük, ha a következők mind teljesülnek:

   - Minden mezőbe a $\{0, 1, 2, ..., p - 1\}$ halmaz egy eleme kerül.
   - Az első sorban nem lehet kiválasztani néhány (legalább egy) egymást követő mezőt úgy, hogy a bennük lévő számok összege osztható legyen p-vel.
   - Ha minden egyes oszlopban összeszorozzuk a számokat egymással, akkor a kapott n darab szorzat összege p-vel osztva n maradékot ad.

   (a) Adott p és n esetén határozd meg a káprázatos kitöltések számát!

   (b) Igazold, hogy van legalább $(n + 1)(p - 1)\varphi(p - 1)$ olyan káprázatos kitöltés, ahol az első és a második sorban is a számok páronként különbözőek (de az megengedett, hogy a táblázatban legyen két azonos szám).

   Megjegyzés. *$\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek számát jelöli.*

Rendelkezésre álló idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.