Gráfok színezései

Hujter Bálint – olimpiai iskola, 2024. jan. 27.

verzió: 2024. április 2. 17:25

Tartalomjegyzék

1. Előre kiadandó feladatok

Kedves Diákok! Ezeken a feladatokon érdemes gondolkodnotok a december 9-i Olimpiai Iskola előtt. A feladatok között van olyan, amelyről már volt szó korábbi olimpiai iskolai alkalmon is.
Nem baj, ha nem tudod megoldani – az a fontos, hogy gondolkodj rajtuk, gyűjts tapasztalatokat, lásd, neked mennyire megy könnyen vagy nehezen.
Az még fontos, hogy ezen feladatok szövegében szereplő fogalmakat (gráf, csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, teljes gráf, síkbarajzolt gráf) értsd. Ezeket nem fogom definiálni-elmagyarázni szombaton, használni annál inkább. Ha esetleg valamelyik nem ismerős, kérdezz vagy olvass utána.

Ha esetleg ezeket mind ismerted vagy gyorsan megoldottad, attól még érdemes eljönnöd,
– lesznek más, nehezebb kérdések is bőven.

1.1. feladat. Egy gráf minden fokszáma legfeljebb 6. Bizonyítsd be, hogy ki lehet színezni a csúcsait 7 színnel úgy, hogy a szomszédos (azaz éllel közvetlenül összekötött) csúcsok mindig különböző színűek legyenek.

1.2. feladat. Mennyi egy egyszerű síkbarajzolt gráf legkisebb fokszámának lehetséges legnagyobb értéke?

1.3. feladat. Egy 8 csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az $1, 2, \ldots, 28$ természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)
a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?
b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?
c*) Mit tudsz mondani általánosan, 8 helyett n csúcsú teljes gráf esetén?

Megjegyzés a 3/c. feladathoz: én sem tudok minden n-re teljes választ adni.

1.4. feladat. Egy teremben 4 asztal és 8 ember van. Egy 32 lapos magyarkártya-paklit véletlenszerűen szétosztottuk a 8 ember között úgy, hogy mindegyik ember kezében 4 lap legyen.
Bizonyítsuk be, hogy mindegyik ember letehet 1-1 lapot a kezéből a 4 asztalra úgy, hogy végül mind a 4 asztalon 8 különböző értékű kártya (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) legyen.

Megjegyzés a 4. feladathoz, rutinos gráfelméleszeknek: ezt meg lehet oldani úgy is, hogy egy ágyúval lelövöd, de igazán nem arra a megoldásra vagyunk kíváncsiak.

2. Első előadás-blokk

2.1. Gráfelmélet-történeti bevezető

- Königsbergi hidak és Euler 1736
- Euler-féle poliédertétel
- Huszárvándorlási probléma
- Hamilton's Icosian Game 1857
- Cayley fagráfok 1880-as évek

Maga a gráf szó is csak 19. század végi, 1878-ban használta először Sylvester.

2.2. Euler-körséták

2.1. tétel (Hierholzer 1873). *G gráfban van Euler-körséta $\Leftrightarrow$ minden fokszáma páros, és összefüggő.*

Bár a könnyebb irányt lényegében Euler átlátta 1736-ban, a nehezebb irányt csak 1873-ban bizonyította egy Carl Hierholzer nevű német matematikus.

2.2.1. A négyszíntétel kezdetei és pontos megfogalmazása

1852-ben egy Francis Guthrie nevű, később dél-afrikába kerülő angol veti fel korábbi témavezetőjének, Augustus de Morgannek a kérdést, hogy igaz-e, hogy minden térkép 4 színnel színezhető? (Mindez a University College London egetemen történik).

Itt persze tisztázni kell, hogy mit értünk térkép alatt.

- Nem lehetnek két részre szakadt országok (Kalinyingrád, Azerbajdzsán)
- Viszont lehetnek (nem zavarnak) a gyűrű alakú országok.

Térképszínezés: tekinthető egy síkgráf tartományainak színezéseként is, de egy (sík)gráf csúcsainak színezéseként is.

Síkbarajzolt gráf: élei nem keresztezhetnek.

2.2. tétel (Négyszínsejtés / négyszíntétel). *Bármely síkbrajzolt gráf csúcsai / tartományai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy szomszédos csúcsok / tartományok mindig különböző színűek legyenek.*

Ez 1852-től 1879-ig sejtés volt. 1879-től 1890-ig tétel. 1890-től 1976-ig sejtés. 1976-tól (Appel és Haken számítógépes bizonyítása óta) egy ideig vitatott, mára már azért széleskörűen elfogadottan tétel.

2.3. Csúcsok színezése – a kromatikus szám fogalma

2.3. definíció. $\chi(G)$: kromatikus szám; $\omega(G)$ legnagyobb klikk; $\Delta(G)$ legnagyobb fokszám.

2.4. állítás. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bizonyításvázlat. Itt a $\omega(G) \leq \chi(G)$ kb. triviális.

Az $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ pedig a 1.1. feladat megoldásának általánosítása. Ehhez elegendő mohó módon színeznünk. □

Érdekes kérdés, hogy milyen messze lehetünk a korlátoktól? Másrészt milyen gráfok kerülnek közel ezekhez a korlátokhoz?

- Ha $\omega(G) = 2$, azaz háromszög-mentes a gráf, akkor is lehet tetszőlegesen nagy a kromatikus szám. (Micielski-konstrukció 1955) → Ebből feladat lesz.
- **Páros gráf**ban (kromatikus szám = 2) persze lehet tetszőlegesen nagy a $\Delta(G)$.

Itt említsük meg (bizonyítás nélkül) ezt a klasszikus tételt.

2.5. tétel (Páros gráfok tétele)**.** $\chi(G) = 2 \iff G$*-ben nincs páratlan kör.*

2.4. Kempe bizonyítási kísérlete

1879-ben egy Alfred Bray Kempe nevű angol (leginkább londoni) matematikus előállt egy bizonyítással, amelyet csak 1890-ben tudtak megcáfolni.

2.4.1. Alacsony fokú csúcs keresése

Akár tartományokat, akár csúcsokat színezünk, síkbarajzolt (tehát él-kereszteződések nélkül lerajzolt) gráfot viszgálunk. Azt is feltehetjük, hogy a gráfunk egyszerű (mivel a színezhetőséget a párhuzamos élek nem befolyásolják).

Mint Kempe megállapította, síkbrajzolt egyszerű gráfra teljesül az alábbi tétel, amellyel válaszolunk a 1.2. feladat kérdésére.

2.6. tétel. *Egyszerű, síkbarajzolt gráfnak van olyan csúcsa, amelynek foka legfeljebb 5. (Minden térképen van olyan ország, amelynek legfeljebb 5 szomszédja van).*

Bizonyításvázlat. Síkgráfokra teljesül az Euler-féle poliédertétel ($n + t = e + 2$), amelynek következménye, hogy egy n-csúcsú *egyszerű sík*gráfnak maximum $3n - 6$ éle lehet.

Ezt már csak azért sem részletezzük, mert Benedek már egy őszi olimpiai iskolában elmondta, a hatszíntétellel együtt. □

Fenti állításból rögtön következik a hatszíntétel.

2.7. tétel (Hatszíntétel)**.** *Síkgráfra* $\chi(G) \leq 6$.

Amit itt még érdemes végiggondolni: Hogy is van az, hogy eddig a *maximális* fokszámot használtuk $\chi(G)$ felső becslésére, most meg már a *minimális* fokszám is elég?

2.8. állítás. *Ha a G gráf minden részgráfjára teljesül, hogy van benne olyan csúcs, amelynek foka legfeljebb k, akkor* $\chi(G) \leq k + 1$.

2.4.2. Továbbfejlesztés 4 színre

Elmondom Kempe „bizonyítását” (ide nem írom le), de azt nem árulom el, hogy hol a hiba benne.

2.5. Tait bizonyítási kísérlete

Peter Guthrie Tait skót matematikus és fizikus, a termodinamika egyik úttörője.

2.9. tétel (Tait 1880)**.** *Négyszíntétel* $\iff$ *Minden 3-reguláris, hídélmentes, síkbrajzolt gráf élei színezhetők 3 színnel.*

Bizonyításvázlat. Négyszíntétel $\iff$ 3-reguláris gráf tartományai színezhetők 3 színnel $\iff$ Minden 3-reguláris, hídélmentes, síkbrajzolt gráf élei színezhetők 3 színnel.

Itt az első $\iff$ lépést megbeszéljük, a másik $\iff$ feladat lesz. □

Tait a jobb oldali állításra azt állította, hogy *ez még a síkbarajzolhatóság nélkül is igaz.*

Tait utóbbi állításár csak 1891-ben mutattak ellenpéldát – de vajon ki?

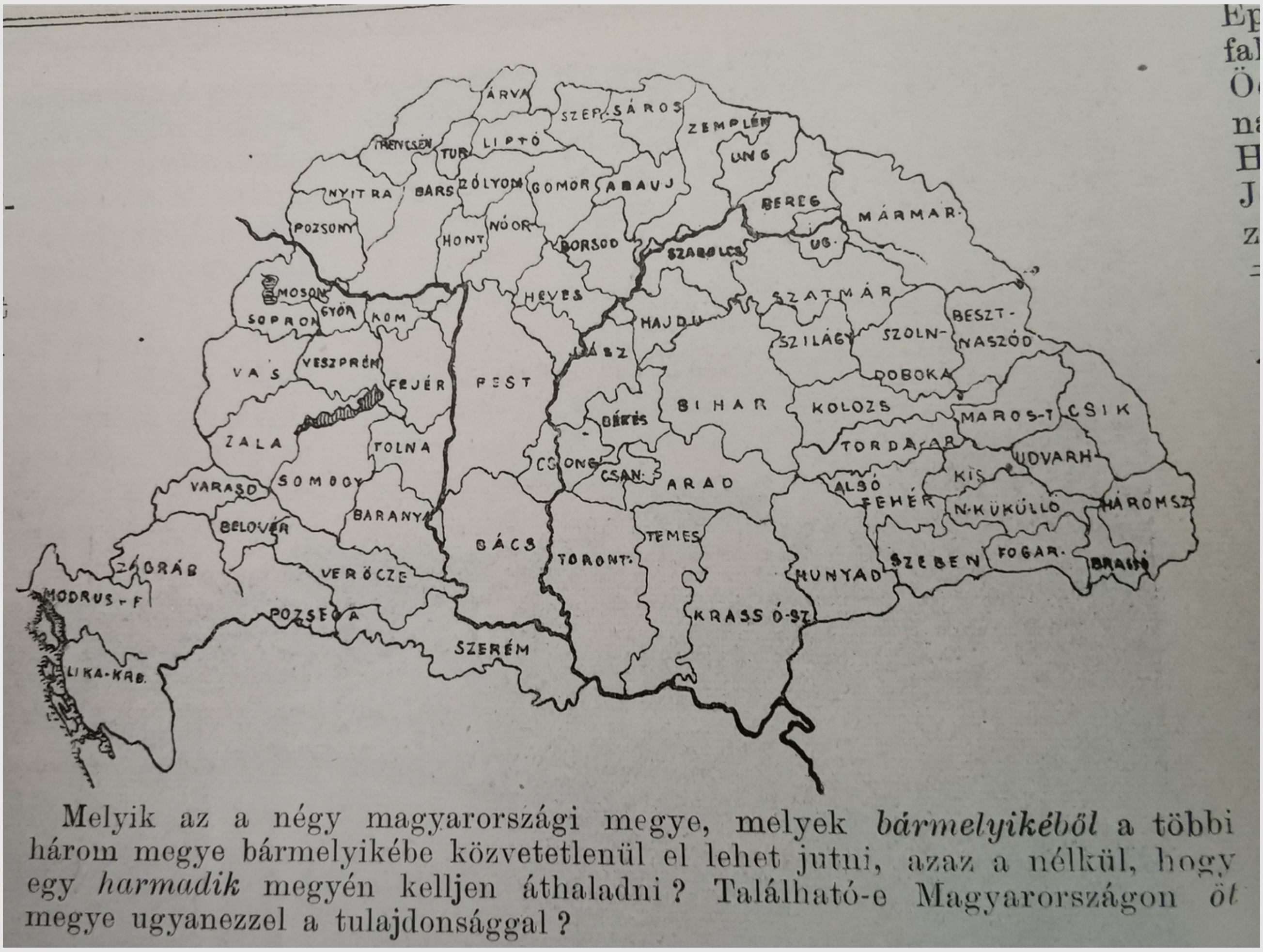
Nos, a helyzet az, hogy a Petersen-gráfot éppen erre a célra találta ki Julius Petersen – dán matematikus. (Valójában 1891-ben még nem a Petersen-gráffal állt elő, hanem azzal csak 1898-ban. Később valaki Kempe egy 1886-os irományában is megtalálta a Petersen-gráfot (ld. wiki „Kempe observed that its vertices can represent the ten lines of the Desargues configuration, and its edges represent pairs of lines that do not meet at one of the ten points of the configuration.”).

2.10. tétel (Petersen)**.** *3-reguláris, hídélmentes gráfban van 1-faktor (azaz teljes párosítás).*

3. Feladatok gondolkodásra

3.1. feladat. Keresd meg a hibát Kempe négyszíntétel-bizonyításában.

3.2. feladat (Vasárnapi Újság rejtvényrovata – 1912)**.** Melyik az a négy magyarországi megye (1912-es térképen), melyek bármelyikéből a többi három megye bármelyikébe közvetlenül el lehet jutni, azaz a nélkül, hogy egy harmadik megyén kelljen áthaladni? Található-e Magyarországon öt megye ugyanezzel a tulajdonsággal?



3.3. feladat (Bábuk a sakktáblán)**. a)** Egy sakktáblára úgy tettem le bábukat, hogy minden sorban és oszlopban pontosan két bábu álljon. Bizonyítsd be, hogy levehetek úgy néhány bábut úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy bábu maradjon.
b) Igaz marad-e az állítás, ha csak azt teszem fel, hogy minden sorban és oszlopban *legalább* két bábu áll?

3.4. feladat. a) Igaz-e, hogy minden 4-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros és 2 kék él találkozzon?
b) Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 3 piros és 3 kék él találkozzon?
c*) Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra, kékre és zöldre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros, 2 kék és 2 zöld él találkozzon?

Megoldás a ***c)*** *részre.* Euler-séta mentén megirányítom, ebből lesz egy $2n$ csúcsú páros gráf úgy, hogy minden csúcsból egy példány fent, egy példány lent, az éleket lefele irányba húzzuk meg. Ez így 3-reguláris páros gráf. Kőnig élszínezési tétel 3 színnel, és készen is vagyunk! :-) $\square$

3.1. Lekötő feladatok (unatkozóknak)

3.5. feladat (Kürschák 2020/1.)**.** Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja.
Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.

3.6. feladat. Bizonyítsd be Tait tételét: Adott egy 3-reguláris, hídélmentes síkbarajzolt gráf. Ekkor:
A gráf tartományai kiszínezhetők 4 színnel $\Longleftrightarrow$ A gráf élei kiszínezhetők 3 színnel.

3.7. feladat. Mutasd meg, hogy háromszögmentes gráfnak is lehet tetszőlegesen nagy a kromatikus száma.

3.8. feladat. Bizonyítsd be Petersen tételét: 3-reguláris, hídélmentes gráfban mindig van teljes párosítás.

4. Második előadás blokk

Az itt leírtakból messze nem hangzott el minden végül, időhiány miatt. Inkább az előzetesen tervezett anyag, mint a ténylegesen megvalósult.

4.1. Kempe bizonyításának lezárása

1890-ben egy Percy John Heawood nevű matematikus megtalálta a hibát, mutatott olyan térképet, amelyen tényleg nem is működik a Kempe-féle eljárás. (Heawood egy mókás ember lehetett a wikipédia-oldala alapján.)

Kempe módszere ettől még igazán értékes. Mint maga Heawood is rögzítette, ha a négyszíntételt nem is, de az ötszíntételt azért tényleg bebizonyította.

4.1. tétel (Ötszíntétel, Kempe 1879 – Heawood 1890)**.** *Minden síkgráfra:* $\chi(G) \leq 5$.

A kulcsötletet jelentő oda-vissza váltakozó átszínezést nevezik a Kempe-láncok módszerének is. Ebből aztán a gráfelmélet egy alapvető bizonyítási módszere (az *alternáló utak módszere*) nőtt ki, jórészt magyar matematikusok: Kőnig Dénes, Egerváry Jenő és Gallai Tibor munkássága által.

Az Appel–Haken féle 1976-os, számítógépet is használó négyszíntétel-bizonyítás is a Kempe-láncok módszerén alapszik.

4.2. Feladat-megbeszélés

1. Gondolkodós blokk 3.2. feladat (Vármegyék)
2. Gondolkodós blokk 3.3. feladat (Bábuk)
3. Gondolkodós blokk 3.4. feladat (a) és (b) része (a (c) megmaradhat HF-nek).
4. Az előre kiadott feladatok közül: 1.4 (Kártyakupacok). Ennek a megoldása éppen a 3.4/(a) és a 3.3. feladat megoldásának ügyes kombinációja.

4.3. Kőnig Dénes élszínezési tétele

4.2. tétel (Kőnig Dénes élszínezési tétele)**.** *Háromféle alakban mondjuk ki:*

- *Reguláris páros gráfban van 1-faktor (azaz teljes párosítás).*
- *k-reguláris páros gráf élei k színnel színezhetők, azaz élkromatikus száma k.*
- *Ha egy páros gráf maximális foka k, akkor élei kiszínezhetők k színnel.*

Elmesélem, hogy Kőnig Dénes hogyan bizonyította ezt, és miként segített neki, hogy olvasta Kempe négyszíntételes cikkét.

4.4. Élkromatikus szám

Tait és Kőnig tételénél (no meg a 3.4. feladatban) is éleket színeztünk.

4.3. definíció. A G *élkromatikus szám*a a legkisebb k pozitív egész, amelyre k színnel ki lehet színezni az éleit úgy, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon. Jele: $\chi'(G)$.

Kőnig tétele ezt mondja: páros gráfokban $\chi'(G) = \Delta(G)$.

4.4.1. Vizing tétele

4.4. tétel (Vizing, 1964). *Egyszerű gráfban* $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Megjegyzések:

- Ennek a bizonyításában is lehet használni Kempe-láncokat.
- Ez alapján lehet I. és II. kategóriájú gráfokról beszélni.
- Többszörös élekkel rendelkező gráfban persze lehet több (példa).

4.4.2. Teljes gráfok élkromatikus száma

4.5. tétel. *Ha* K_n *jelöli az* n *csúcsú teljes gráfot, akkor ha* n *páros, akkor* $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$, *míg ha* n *páratlan, akkor* $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1 = n$.

4.5. Még egyszer a csúcsszínezésről

Nézzünk rá még egyszer a $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ egyenlőtlenségünkre.

A felső határt élesítő gráfokat karakterizálja a Brooks-tétel.

4.6. tétel (Brooks, 1941). $\chi(G) \leq \Delta(G)$, *kivéve ha teljes gráf vagy páratlan kör.*

Ennek bizonyítása is a Kempe-láncos módszerből (annak továbbfejlesztéséből) jön ki. 1975-ben Lovász László adott rá egy híres, gimnazistaként is megérthető bizonyítást.

5. Házi feladatok

5.1. feladat (eredetileg Kiskvant; átvette Bergengóc példatár 1. kötet, 90. feladat)**.** Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belőle?

A fenti feladat eredetileg Kiskvantban szerepelt, onnan a Matkönyvbe és a Bergengóc példatárba (1. kötet, 90. feladat) is átkerült

5.2. feladat (IMO 1964/4)**. a)** 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármelyik kettő azonos témáról levelez egymással.
b) (Ezt nem kérdezék az olimpián.) Mi a helyzet 16 tudós esetén?

5.3. feladat (IMO 2020/3., javasolta Haiman Milán és Carl Schildrkaut)**.** Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

5.4. feladat. Egy sakktáblán áll 33 bástya. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 5 bástya, melyek közül semelyik kettő nincs azonos sorban vagy oszlopban.

5.1. Szorgalmi

5.5. feladat (Lovász 9.56., Whitney tétele)**.** Legyen G háromszögelt síkgráf, ekkor:

$$G \text{ csúcsai színezhetők 3 színnel} \iff G \text{ tartományai színezhetők 2 színnel.}$$

5.6. feladat (Lovász 9.57., Sachs tétele)**.** Rajzoljunk a síkba egyeneseket úgy, hogy nincsen köztük 3, melyek egy pontban metszik egymást. Tekintsük a metszéspontokat egy gráf pontjainak, és a szomszédos metszéspontok közötti szakaszokat a gráf éleinek. Bizonyítsuk be, hogy a kapott síkbarajzolt gráf 3-színezhető.

5.2. Ez már tényleg nagyon nehéz...

5.7. feladat (IMO 2015 SL/C7)**.** In a company of people some pairs are enemies. A group of people is called unsociable if the number of members in the group is odd and at least 3, and it is possible to arrange all its members around a round table so that every two neighbors are enemies. Given that there are at most 2015 unsociable groups, prove that it is possible to partition the company into 11 parts so that no two enemies are in the same part.

A jegyzetben szerepel néhány tétel (Brooks-, Petersen-, Vizing-tétel), amelyek bizonyítása nem könnyű és nem is különösen rövid, de elérhető. Ezeken is szabad gondolkodni.