

Olimpiai szakkör 2024. március 1.

1. Az ABC háromszög köré írt körhöz A -ban és B -ben húzott érintők metszéspontja legyen D . Az ABD háromszög köré írt köre az AC egyenest és a BC szakaszt másodszor rendre az E és F pontokban metszi. Legyen CD és BE metszéspontja G . Határozzuk meg a $BG : GE$ arányt, ha $BC : BF = 2 : 1$.
2. Egy társas összejövetelen n ember vett részt. A társaság tagjai közül időnként leült három ember egy ultipartira. Hazamenetelkor megállapították, hogy bármely három ember legfeljebb egy partiban játszott együtt és bármely két ember pontosan két partiban vett részt együtt. Milyen n értékekre lehetséges ez, ha $3 < n < 10$?
3. Melyek azok az $(a;b;c)$ rendezett valós számhármások, amelyekre ha az a, b, c bármelyikét kivonjuk a másik kettő szorzatából, úgy 2007-et kapunk?
4. Adott egy parabola és síkjában a P külső pontból húzott két érintő, rajtuk az A illetve B érintési ponttal. A parabola az ABP háromszöget egy X területű konvex és egy Y területű konkáv részre osztja. Igazoljuk, hogy az $X:Y$ arány nem függ a külső P pont megválasztásától.
5. Egy négyzetet oldalával párhuzamos egyenesekkel 16 egybevágó négyzetre bontunk. Ezeket a négyzeteket pirosra vagy kékre színezhetjük a következő módon: egyszerre egy 2×2 -es vagy 3×3 -as (az oldalakkal párhuzamos) négyzet 4 illetve 9 négyzetének színeit változtathatjuk ellenkezőre. Kezdetben mind a 16 négyzet piros. (a) Az előbbi lépések egymásutáni alkalmazásaival elérhető-e, hogy a felső sor balról második négyzete kék, a többi 15 négyzet piros legyen? (b) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 2^{12} féle színezés lehetséges. A forgatással és/vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket is különbözőknek tekintjük.
6. Egy 2 egység magasságú egyenes körhenger alapkörének átmérője legyen egy egység. A hengert olyan síkkal vesszük el, mely a forgástengellyel 45° -os szöget zár be és az alapkörrel egyetlen közös pontja van. Legyen ez a pont O . A hengerpalástot ezután az O ponton átmenő alkotó mentén felvágva kiterítjük, ami által a metszetgörbe síkgörbe lesz. Mely $x \rightarrow f(x)$ függvény grafikonja ez a síkgörbe?