OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Polinomok bevezető

Borbényi Marci szakköre

Elmélet

- Gyökök kiemelése, számuk
- Viete-formulák
- Elemi szimmetrikus polinomok
- Szimmetrikus polinomok alaptétele

Feladatok

F/1. Mik azok az (a, b) valós számpárok, amikre $a + b = 10$ és $ab = -8$?

F/2. Hogyan írnád fel $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként?

F/3. Legyenek α, β, és γ az $x^3 - x - 1 = 0$ polinom gyökei. Mennyi $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$?

F/4. Legyenek a, b, c, d különböző számok, amikre

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Bizonyítsd be, hogy van kettő, melyek összege 0.

F/5. Legyenek az $x^4 - x^3 - x^2 - 1$ polinom gyökei z_1, z_2, z_3, és z_4. Mennyi $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$, ahol $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$?

F/6. Az $x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ polinomnak az $r < s < t$ irracionális számok a gyökei. Tudjuk, hogy egyértelműen léteznek A, B, és C racionális számok úgy, hogy $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ polinomnak $r + s$ gyöke. Mennyi $A + B + C$?

F/7. Legyenek a, b valósak, $a \neq 0$ és legyen

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b.$$

Bizonyítsd be, hogy $P(x)$ polinomnak pontosan akkor van 4 valós gyöke, ha $a = b$.

2024. február 24.

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/8. (Raconiális gyökteszt) **a)** Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely p, q relatív prímekre $P(\frac{p}{q}) = 0$, akkor $p|a_0,\ q|a_n$.
b) Bizonyítsd be, hogy ha egy q racinális szám gyöke egy 1 főegyütthatós egész polinomnak, akkor q egész.

F/9. Legyenek a, b, c egészek, amikre az

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

összeg is egész. Bizonyítsd be, hogy az

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{bc}{a}$$

számok is egészek.

F/10. Legyen $P(x)$ egy n fokú polinom úgy, hogy $P(k) = \frac{k}{k+1}$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ esetén. Mennyi $P(n+1)$?

F/11. Legyen $P(x)$ egy 2011 fokú polinom, amire $P(1) = 0$, $P(2) = 1$, $P(4) = 2$, $\ldots$, és $P(2^{2011}) = 2011$. Mennyi x^1 együtthatója $P(x)$-ben?

F/12. (Lagrange interpoláció) Adottak $a_0, a_1, \ldots, a_n$ különböző valós számok.
a) Minden $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$-re konstruáljunk olyan $P_i(x)$ polinomot, amire $P_i(a_i) = 1$, $P_i(a_j) = 0$ ha $i \neq j$.
b) Adott $b_0, b_1, \ldots, b_n$ számok esetén konstruáljunk olyan P polinomot, amire $P(a_i) = b_i$. Írjuk le képlettel. Ez Lagrange interpolációs képlete.
c) Van-e másik maximum n fokú polinom, ami ezeken a helyeken ugyanazeket az értékeket veszi fel?

F/13. (Schur-tétel) Bizonyítsd be, hogy minden egész együtthatós $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom esetén a $\{P(1), P(2), P(3), \ldots\}$ halmaznak végtelen sok prímosztója van.

F/14. Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós polinom. Bizonyítsd be, hogy bármely a, b egész számra $a - b|P(a) - P(b)$.

F/15. A $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom olyan, hogy három különböző egész helyen ± 1 értéket vesz fel. Bizonyítsd be, hogy nincsen egész gyöke.

F/16. Mik azok a $P(X)$ polinomok, amikre az $x = 1, 2, \ldots, 2021$ helyeken az $1, 2, \ldots, 2021$ értékekeket veszi fel, valamilyen sorrendben?

2024. február 24.
Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Lekötő feladatok

N/1. Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Bizonyítsd be, hogy bármely valós h és A esetén
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(A + kh) = a_n n! h^n.$$

N/2. Legyen $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ olyan polinom, hogy minden egész helyen egész értéket vesz fel.
a) Bizonyítsd be, hogy $n!a_n \in \mathbb{Z}$.
b) Bizonyítsd be, hogy léteznek $c_0, c_1, \dots c_n$ egész számok úgy, hogy $p(x) = c_n\binom{x}{n} + c_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + c_1\binom{x}{1} + c_0$, ahol $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ minden egész k-ra és valós x-re.

N/3. Egy számot algebrainak nevezünk, ha egy nem konstans racionális együtthatós polinom gyöke. Bizonyítsd be, hogy két algebrai szám összege, szorzata is algebrai.

N/4. Legyen $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ úgy, hogy $P(n) > n$ minden pozitív egész n-re. Legyen $x_1 = 1$ és $x_{k+1} = P(x_k)$ minden $k \in \{1, 2, \dots\}$ esetén. Illetve azt is tudjuk, hogy bármely m esetén van a sorozatnak egy eleme, ami osztható m-mel. Bizonyítsd be, hogy $P(x) = x + 1$.

N/5. Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ polinomot, ahol P k-szor fordul elő. Bizonyítsd be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.

N/6. Legyen $b_1 = 0,\ b_2 = 2,\ b_3 = 3,\ b_n = b_{n-2} + b_{n-3}$ ha $n \geq 4$. Bizonyítsd be, hogy minden p prímszámra $p|b_p$.

N/7. Legyen F_n az n-edik Fibonacci szám és legyen P egy 990 fokú polinom, amire minden $k \in \{992, \dots, 1982\}$ esetén $P(k) = F_k$. Bizonyítsd be, hogy $P(1983) = F_{1983} - 1$.

N/8. Legyen P egy egész együtthatós polinom, és legyen p egy prím úgy, hogy $f(0) \equiv 0, f(1) \equiv 1, f(k) \equiv 0, 1 \mod p$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a fok legalább $p - 1$.

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Polinom bevezető

Borbényi Marci szakköre

Házi feladatok

Beadási határidő: 2024. március 3. (vasárnap)

HF/1. Legyen $P(x)$ egy n-ed fokú polinom úgy, hogy $P(k) = 2^k$ minden $k = 0, 1, 2, ..., n$ esetén. Mennyi $P(n+1)$?

HF/2. Legyenek a, b, c valós számok. Bizonyítsd be, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \iff a^5 + b^5 + c^5 = (a + b + c)^5.$$

HF/3. Legyen $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ úgy, hogy valamely k egész értékre $P(P(\cdots P(k)\cdots)) = k$, akkor $P(P(k)) = k$.

HF/4. Bizonyítsd be, hogy nincsenek páronként különböző a, b, c, d számok úgy, hogy

$$a^3 - bcd = b^3 - cda = c^3 - dab = d^3 - adc.$$

Szakkörvezető: Borbényi Marci (marton.borbenyi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com