Olimpiai szakkör 2024. január 12.

1. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek.
2. Az ABC háromszögben $BAC\angle=94°$, $ACB\angle=39°$. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalaira fennáll: $BC^2=AC^2+AC\cdot AB$.
3. Oldjuk meg a valós számok körében: $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$
4. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain adottak rendre a P, Q és R pontok. Igazoljuk, hogy az APR, BPQ és CQR háromszögek köré írt körei középpontjai által meghatározott háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.
5. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget: $\sqrt{2012+\sqrt{2011+\sqrt{2010+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<46.$
6. Tekintsük az összes olyan parabolát, melyek egyenlete $y=x^2+ax+b$, ahol a és b valós számok, továbbá a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bármely parabola esetén ez a három pont meghatároz egy kört. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen kör átmegy egy közös ponton.
7. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?
8. Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABD\angle = ACD\angle$. Legyenek a BC és AD élek felezőpontjai rendre E és F. Az AC és BD átlók metszéspontjának az AB és CD oldalegyenesekre eső merőleges vetületei G és H. Igazoljuk, hogy az EF és GH egyenesek egymásra merőlegesek.
9. Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az ac, $bc+ad$, bd mindegyike osztható az n egésszel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc+ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n-nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.
10. A $H=\{1; 2; 3; ...; 9\}$ halmaz egy P partíciójának nevezzük azt, ha H-t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n-t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a $P:\{1; 4; 5\}\cup\{2\}\cup\{3; 6; 7; 8; 9\}=H$ partíció esetén $P(6)=5$. Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H-beli n és m elem, amelyekre $P_1(n)=P_1(m)$ és $P_2(n)=P_2(m)$.