Olimpiai szakkör december 15.

1. Egy énekversenyen 8 énekes vett részt. Összesen d dalt énekeltek, mindegyiket négyen adták elő és bármely két énekes ugyanannyi dalt adott elő közösen. Mi a legkisebb d, amire ez lehetséges?
2. Legyen M a hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja. Az A-ból a BC átmérőjű körhöz húzott érintők érintési pontjai P és Q. Mutassuk meg, hogy P, M, Q egy egyenesen vannak.
3. Az 1, 2, …,n közt minden párt összekötünk piros, fehér, vagy zöld vonallal. Határozzuk meg a legkisebb n értéket, amire lesz $a<b<c$ melyekre ab, bc, cd színe azonos.
4. Egy $n\times n$-es táblába beírjuk az 1, 2, …, n^2 számokat. Minden szám beírásakor felírjuk egy papírra a sorába és oszlopába már beírt számok összegét. Hogyan töltsük ki a táblát, hogy a papírra írt számok összege a lehető legkisebb legyen?
5. Adott n pozitív szám, a_1, a_2, …, a_n, amelyek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy
$$\mathbf{1} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_1 + \cdots + a_{i-1}} \cdot \sqrt{a_i + \cdots + a_n}} < \frac{\pi}{2}$$
6. Bizonyítsuk be, hogy ha n 2-nél nagyobb egész, akkor létezik két páratlan szám x_n és y_n, amelyekre $7x_n^2+y_n^2=2^n$.
7. A véges sok elemet tartalmazó H halmaznak adott hat darab 3 elemű részhalmaza. Mutassuk meg, hogy H elemei kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a hat halmaz mindegyike kétszínű legyen.
8. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, valamint az A csúcsnak a beírt kör középpontjától és a magasságponttól vett távolsága.