Olimpiai szakkör 2023. november 10.

1. Melyik az a maximális sugarú kör a sakktáblán, amely egyetlen fehér mezőbe sem metsz bele?
2. A táblán a következő számok állnak: $7+\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}-1$, 9. Egy lépésben kiválaszthatunk kettőt, jelölje őket a és b, ezeket letöröljük és helyettük felírjuk $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$-t és $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$-t. Elérhető-e, hogy valahány lépés után a táblán valamilyen sorrendben a $8+\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, és 7 számok álljanak?
3. Rajzoljuk meg egy háromszög beírt körét és szerkesszünk köré négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet kerületének több, mint fele a háromszög belsejébe esik.
4. Egy 5×7-es tábla fedhető-e **L** alakokkal úgy, hogy minden mezőt ugyanannyi **L** fedjen? Az **L** -ek nem lóghatnak le a tábláról, de több rétegben lehetnek egymás felett. (**L** alakzat: egy 2×2-es, egyik mezőjének elhagyásával)
5. Egy sokszöget kivágunk papírból, kerületének két pontját kiválasztva az őket összekötő egyenes mentén összehajtjuk, így egy újabb sokszöget kapunk. Igazoljuk, hogy az új sokszög kerülete kisebb az eredetinél.
6. Legyen $A=\{1,2,3,4,5\}$ és $B=\{1,2,3\}$. Hány $f\colon A\to A$ fügvény van, amelyre $f(f(x))$ értékkészlete B?
7. Egy kocka felszínén behúztunk három lapátlót, melyek páronként kitérőek. Egy egyenes mindhárommal ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?
8. Legyen $h(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy
$$\frac{1}{h^2(1)}+\frac{1}{2h^2(2)}+\frac{1}{3h^2(3)}+\cdots+\frac{1}{2023h^2(2023)}<2.$$