Egyenlőtlenségek

2023. november 25., Kós Géza (kosgeza@gmail.com)

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség és változatai

- $$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2} \ge a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$
- Nemnegatív számokra
  $$\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)} \ge \sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}$$
  avagy összegek mértani közepe legalább akkora, mint a mértani közepek összege
- Nemnegatív $a_1,\ldots,a_n$ és pozitív $x_1,\ldots,x_n$ esetén
  $$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$
  (Engel-féle alak, Titi-lemma stb.)

Hölder egyenlőtlenség és változatai

- $p,q>1$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \ge 0$
  $$\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q} \ge a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$
- $w_1,w_2>0$, $w+1+w_2=1$; $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \ge 0$
  $$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{w_1}(b_1+b_2+\ldots+b_n)^{w_2} \ge a_1^{w_1}b_1^{w_2}+a_2^{w_1}b_2^{w_2}+\ldots+a_n^{w_1}b_n^{w_2}$$
  avagy összegek súlyozott mértani közepe legalább akkora, mint a súlyozott mértani közepek összege
- Ugyanezek több sorozattal (táblázatos Hölder)

Feladatok

F/1. Nesbitt-egyenlőtlenség: Tetszőleges $a,b,c>0$ számokra
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Közepek

F/2. Igazoljuk, hogy $a, b, c > 0$ esetén $a + b + c \le \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$.

F/3. Alkalmas számok számtani és mértani közepei segítségével határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet x^2y, ha $x, y \ge 0$, és (a) $2x + y = 10$; (b) $x + 3y = 10$.

F/4. Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + 2b + 3c = 5$?

F/5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \ge 1.$$

(IMO 2001/2)

Lineáris becslés

F/6. Legyenek a és b olyan pozitív valós számok, melyekre $a^2 + b^2 = \frac{2}{9}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2 - 3a} + \frac{1}{2 - 3b} \ge 2.$$

(KöMaL C. 1751.)

F/7. Legyenek a, b, c és d olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \ge \frac{7}{2}.$$

(KöMaL B. 5289.)

Konvexitás

F/8. Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin\sqrt{xy}$, vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$? (Írjuk fel a Jensen-egyenlőtlenséget egy alkalmas függvényre.)

F/9. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le x, y \le 1$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1 + xy}}.$$

Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij

F/10. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 1$, akkor

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + d} + \frac{d^2}{d + a} \ge \frac{1}{2}.$$

(Ír versenyfeladat, 1999)

2023. november 25., Kós Géza, (kosgeza@gmail.com)

F/11. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ páronként különböző pozitív valós számok, melyekre fennáll, hogy

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

egész szám minden $n = 1, 2, \ldots, 2023$ esetén. Mutassuk meg, hogy $a_{2023} \geq 3034$. (IMO 2023/4)

F/12. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ pozitív számok, amelyekre $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1^2 \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_3 + \ldots + a_{100}^2 \cdot a_1 < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(IMO Shortlist 2007/A6)

Hölder

F/13. A Hölder-egyenlőtlenségből vezessük le, hogy $a, b, c > 0$ esetén $a+b+c \leq \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$.

F/14. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 2$, akkor

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^{3/2}}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^{3/2}}{\sqrt{d+a}} \geq \sqrt{2}.$$

F/15. Az x, y, z pozitív számokra $xyz = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO feladatjavaslat, 1998)

Vegyes

F/16. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ különböző pozitív egészek, akkor

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

F/17. Mutassuk meg, hogy ha $x, y > 1$, akkor

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

F/18. Az $x_1, \ldots, x_n$ pozitív számokra

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geq (n-1)^n.$$

2023. november 25., Kós Géza, (kosgeza@gmail.com)

F/19. Az a, b, c pozitív valós számokra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

F/20. Egy háromszög oldalai a, b, c. Mutassuk meg, hogy

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$