Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2012

2012/1. Határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész N számot, amire a

$$99x + 100y + 101z = N$$

egyenletnek egyértelmű a megoldása a pozitív egész számok között.

2012/2. 1000 diák áll egy kör mentén. Bizonyítsuk be, hogy van olyan k, ahol $100 \leq k \leq 300$, melyre a kör mentén van $2k$ egymást követő diák úgy, hogy ugyanannyi lány van az első felében, mint a másodikban.

2012/3. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalán van az L pont. Az L középpontú l kör érinti AB-t B'-ben és AC-t C'-ben. Az ABC háromszög köré írt k kör O középpontja az l kör rövidebb $B'C'$ ívén van. Igazoljuk, hogy a k és l köröknek két közös pontjuk van.

2012/4. Tekintsük a $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot ... \cdot (x + d_9)$ polinomot, ahol $d_1, d_2, ..., d_9$ kilenc különböző egész szám. Igazoljuk, hogy létezik olyan N egész, hogy minden N-nél nagyobb k egész esetén $P(k)$-nak van 20-nál nagyobb prím osztója.

2012/5. Legyen k a hegyesszögű ABC háromszög köré írt köre, C' és B' rendre az AB és AC oldalak felezőpontjai. Az A-ból induló magasság talppontja D, a háromszög súlypontja S. Az l kör átmegy B'-n és C'-n, és érinti k-t az A-tól különböző E pontban.

Igazoljuk, hogy D, S és E egy egyenesen vannak.

2012/6. Az f és g függvények a pozitív egészekhez pozitív egészeket rendelnek. Minden pozitív egész n esetén

$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1,$$

ahol $f^k(n)$ jelentése $f^1(n) = f(n), f^2(n) = f(f(n)), f^3(n) = f(f(f(n))), ...$

Határozzuk meg a feltételeknek megfelelő összes $(f; g)$ függvénypárt.